Geometría Diferencial 2026

Lista 03

12.marzo.2026

1. Mostrar que el cilindro $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 = 1\}$ es una superficie regular, y encuentre parametrizaciones que cubran dicha superficie.

2. Sea $f(x, y, z) = z^2$. Muestre que 0 no es un valor regular de f y que aún así, $f^{-1}(0)$ es una superficie regular.

3. Sea $f(x, y, z) = (x + y + z - 1)^2$.

   a) Localizar los puntos críticos y valores críticos de f.

   b) ¿Para qué valores de c el conjunto $f(x, y, z) = c$ es una superficie regular?

4. Sea $\mathbf{x}(u, v) = (u \cos v, u \sin v, u^2)$ una parametrización del paraboloide $z = x^2 + y^2$. Sea $\alpha(t)$ una curva sobre la superficie dada en coordenadas locales por $u(t) = t$, $v(t) = t$.

   a) Calcule la expresión de la curva $\alpha(t)$ en $\mathbb{R}^3$.

   b) Calcule el vector velocidad $\alpha'(1)$.

   c) Exprese $\alpha'(1)$ como una combinación lineal de los vectores de la base $\{\mathbf{x}_u, \mathbf{x}_v\}$ evaluados en $t = 1$.

   d) Mostrar que el paraboloide es difeomorfo al plano $\mathbb{R}^2$.

5. (a) Probar que $\mathbf{x} : U \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ dada por

$$\mathbf{x}(u, v) = (a \sin u \cos v, b \sin u \sin v, c \cos u), \quad a, b, c \neq 0,$$

   con $0 < u < \pi, 0 < v < 2\pi$, es una parametrización para el elipsoide

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1.$$

   Describir geométricamente las curvas $u = const$ y $v = const.$ sobre el elipsoide.

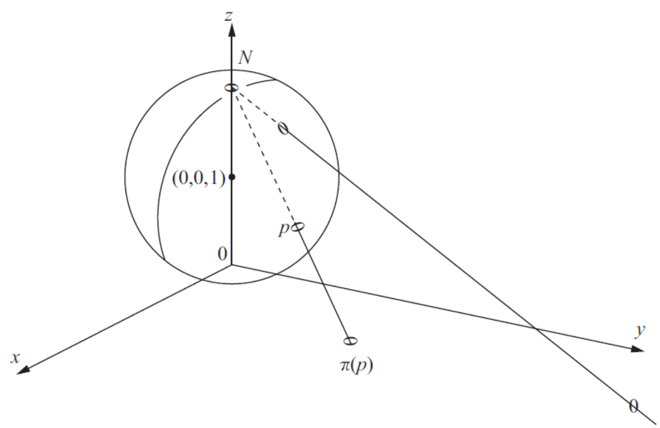
   (b) Mostrar que este elipsoide es difeomorfo a la esfera unitaria $S^2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \; x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$.

6. Una forma de definir un sistema de coordenadas para la esfera S^2, dada por $x^2 + y^2 + (z-1)^2 = 1$, es considerar la **proyección estereográfica** $\pi : S^2 - \{N\} \to \mathbb{R}^2$ que lleva el punto $\mathbf{p} = (x, y, z)$ en la esfera S^2 menos el polo norte $N = (0, 0, 2)$ sobre la intersección del plano xy con la recta que conecta N con $\mathbf{p}$ (Fig. abajo). Sea $(u, v) = \pi(x, y, z)$, donde $(x, y, z) \in S^2 - \{N\}$ y $(u, v) \in$ plano xy.

   a) Pruebe que $\pi^{-1} : \mathbb{R}^2 \to S^2$ está dada por

$$x = \frac{4u}{u^2 + v^2 + 4}, \quad y = \frac{4v}{u^2 + v^2 + 4}, \quad z = \frac{2(u^2 + v^2)}{u^2 + v^2 + 4}.$$

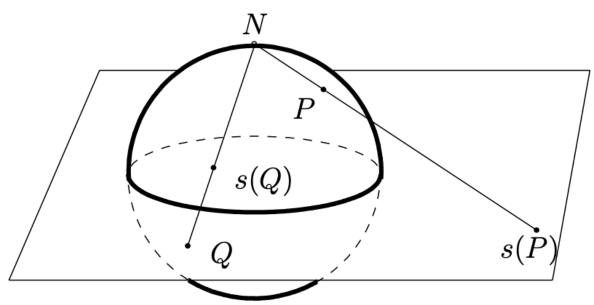
   b) Muestre que es posible, usando la proyección estereográfica, cubrir la esfera con dos cartas locales.



7. Consideramos ahora la esfera unitaria $S^2 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \ x^2+y^2+z^2 = 1\}$ con la proyección estereográfica **estándar**. Sean $\mathbf{x}_1(u,v)$ la parametrización dada por la proyección estereográfica desde el polo norte $N = (0,0,1)$ y $\mathbf{x}_2(\bar{u},\bar{v})$ la parametrización obtenida mediante la proyección estereográfica desde el polo sur $S = (0,0,-1)$.

   a) Determine el dominio de la intersección de las imágenes de ambas parametrizaciones.

   b) Calcule explícitamente el cambio de coordenadas $\mathbf{x}_2^{-1} \circ \mathbf{x}_1$ y demuestre que es un difeomorfismo.



8. Sea $S^2 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 ; x^2+y^2+z^2 = 1\}$ la esfera unitaria y sea $A : S^2 \to S^2$ el mapa antipodal $A(x,y,z) = (-x,-y,-z)$. Pruebe que A es un difeomorfismo.

9. Tomemos S la superficie de revolución generada al rotar la curva $z = \log(x)$ (con $x > 0$) alrededor del eje z.

   a) Proporcione una parametrización $\mathbf{x}(u,v)$ para S.

   b) Determine una base para el plano tangente T_pS en el punto $p = (1,0,0)$.

   c) Encuentre la ecuación cartesiana del plano tangente en dicho punto.

10. Mostrar que el cono $C : x^2+y^2 = z^2$ no es una superficie regular.