Teoría local de curvas: Forma canónica local

Alan Reyes-Figueroa
Geometría Diferencial (Aula 05) 29.enero.2026

El triedro móvil

Al cambiar la orientación de α, el vector tangente $\mathbf{t}(s)$ cambia de dirección, el vector normal $\mathbf{n}(s)$ no cambia $\Rightarrow$ $\mathbf{b}(s)$ cambia de dirección.

Para ver esto, hagamos $t = -s$, y sea $\beta(t) = \alpha(s)$. Entonces

$$\begin{aligned}
\mathbf{t}_\beta(t) &= \beta'(t) = \tfrac{d}{dt}\beta(t) = \tfrac{d}{ds}\tfrac{ds}{dt}\alpha(s) = -\tfrac{d}{ds}\alpha(s) = -\alpha'(s) = -\mathbf{t}_\alpha(s),\\
\mathbf{n}_\beta(t) &= \mathbf{n}_\alpha(s),\\
\mathbf{b}_\beta(t) &= \mathbf{t}_\beta(t) \times \mathbf{n}_\beta(t) = -\mathbf{t}_\alpha(s) \times \mathbf{n}_\alpha(s) = -\mathbf{b}_\alpha(s),\\
\mathbf{b}'_\beta(t) &= \tfrac{d}{dt}\mathbf{b}_\beta(t) = \tfrac{d}{ds}\tfrac{ds}{dt}(-\mathbf{b}_\alpha(s)) = -\tfrac{d}{ds}(-\mathbf{b}_\alpha(s)) = \mathbf{b}'_\alpha(s).
\end{aligned}$$

En consecuencia,

$$\begin{aligned}
\kappa_\beta(t)\,\mathbf{n}_\beta(t) &= \beta''(t) = \alpha''(s) = \kappa_\alpha(s)\,\mathbf{n}_\alpha(s) \quad \Rightarrow \quad \kappa_\beta(t) = \kappa_\alpha(s),\\
\tau_\beta(t)\,\mathbf{n}_\beta(t) &= \mathbf{b}'_\beta(t) = \mathbf{b}'_\alpha(s) = \tau_\alpha(s)\,\mathbf{n}_\alpha(s) \quad \Rightarrow \quad \tau_\beta(t) = \tau_\alpha(s).
\end{aligned}$$

Así, la curvatura κ y la torsión τ son invariantes al cambiar orientación.

El triedro móvil

Para cada $s \in I$ hemos definido tres vectores unitarios $\mathbf{t}(s)$, $\mathbf{n}(s)$ y $\mathbf{b}(s)$.
Las derivadas de estos vectores satisfacen

$$\mathbf{t}'(s) = \kappa(s)\mathbf{n}(s) \qquad \text{y} \qquad \mathbf{b}'(s) = \tau(s)\mathbf{n}(s).$$

Además, $\{\mathbf{t}(s), \mathbf{n}(s), \mathbf{b}(s)\}$ es una base ortonormal en cada punto $\alpha(s)$, con orientación positiva. Esto implica que

$$\mathbf{b}(s) = \mathbf{t}(s) \times \mathbf{n}(s), \qquad \mathbf{t}(s) = \mathbf{n}(s) \times \mathbf{b}(s), \qquad \mathbf{n}(s) = \mathbf{b}(s) \times \mathbf{t}(s).$$

Así,

$$\begin{aligned}
\mathbf{n}'(s) &= \big(\mathbf{b}(s) \times \mathbf{t}(s)\big)' = \mathbf{b}'(s) \times \mathbf{t}(s) + \mathbf{b}(s) \times \mathbf{t}'(s) \\
&= [\tau(s)\mathbf{n}(s)] \times \mathbf{t}(s) + \mathbf{b}(s) \times [\kappa(s)\mathbf{n}(s)] \\
&= \tau(s)[\mathbf{n}(s) \times \mathbf{t}(s)] + \kappa(s)[\mathbf{b}(s) \times \mathbf{n}(s)] \\
&= -\kappa(s)\mathbf{t}(s) - \tau(s)\mathbf{b}(s).
\end{aligned}$$

El triedro móvil

Obtenemos entonces el sistema de EDOs

$$\begin{aligned} \mathbf{t}'(s) &= \kappa(s)\mathbf{n}(s), \\ \mathbf{n}'(s) &= -\kappa(s)\mathbf{t}(s) - \tau(s)\mathbf{b}(s), \quad \forall s \in I. \\ \mathbf{b}'(s) &= \tau(s)\mathbf{n}(s), \end{aligned}$$

que en forma matricial, se escribe como

$$\begin{pmatrix} \mathbf{t}'(s) \\ \mathbf{n}'(s) \\ \mathbf{b}'(s) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \kappa(s) & 0 \\ -\kappa(s) & 0 & -\tau(s) \\ 0 & \tau(s) & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{t}(s) \\ \mathbf{n}(s) \\ \mathbf{b}(s) \end{pmatrix}, \quad \forall s \in I.$$

Estas EDO se llaman las **fórmulas de Frenet**.

El triedro móvil

Definición

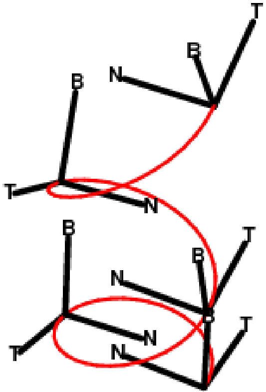
El sistema $\{\mathbf{t}(s), \mathbf{n}(s), \mathbf{b}(s)\}$ *se llama el* ***triedro de Frenet-Serret, triedro móvil*** *o* ***referencial móvil***.

Definición

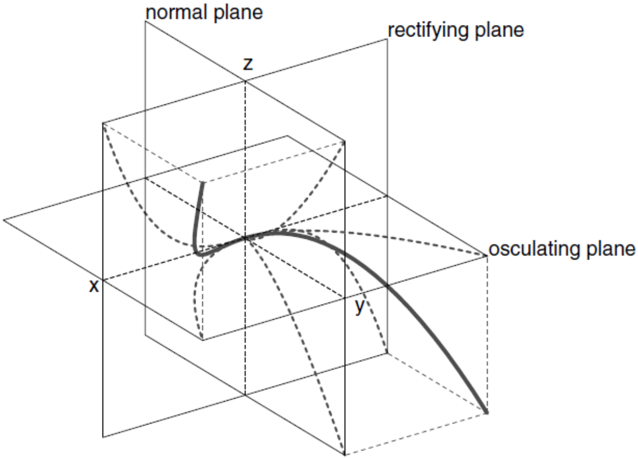
Al plano $\langle \mathbf{t}(s), \mathbf{b}(s) \rangle$, *pasando por* $\alpha(s)$, *se le llama* ***plano rectificante***, *mientras que al plano* $\langle \mathbf{n}(s), \mathbf{b}(s) \rangle$ *se le llama el* ***plano normal***.

Definición

La recta generada por $\mathbf{t}(s)$ *es la* ***recta tangente***, *la recta generada por* $\mathbf{n}(s)$ *es la* ***recta normal principal***, *y la recta generada por* $\mathbf{b}(s)$ *es la* ***recta binormal***.



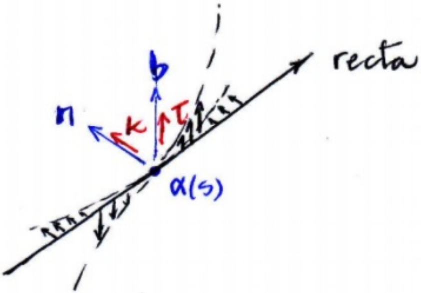
El triedro móvil



El triedro móvil

Obs. Usualmente, una curva $\alpha : I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$, que es de clase C^3, regular, y tal que $\kappa(s)$ y $\tau(s)$ nunca se anulan, se llama una **curva de Frenet**.

Físicamente, una curva de Frenet puede pensarse como la deformación de una recta cuando esta es enrollada por la acción de $\kappa(s)$ y torcida por la acción de $\tau(s)$.



Forma canónica local

El triedro de Frenet proporciona un marco de referencia apropiado para estudiar curvas en $\mathbb{R}^3$.

Sea $\alpha : I \to \mathbb{R}^3$ una curva de Frenet (clase C^3 y regular), de modo que $\{\mathbf{t}(s), \mathbf{n}(s), \mathbf{b}(s)\}$ siempre es una base de $\mathbb{R}^3$.

Consideramos la expansión de Taylor de $\alpha(s)$ alrededor de $s = 0$

$$\alpha(s) = \alpha(0) + s\alpha'(0) + \frac{s^2}{2}\alpha''(0) + \frac{s^3}{6}\alpha'''(0) + o(s^3).$$

($o(s^3)$ es un término que satisface $\lim_{s\to 0} \dfrac{o(s^3)}{s^3} = 0$).

Como $\alpha'(0) = \mathbf{t}(0) = \mathbf{t}$, $\alpha''(0) = \kappa(0)\mathbf{n}(0) = \kappa\mathbf{n}$ y

$$\alpha'''(0) = (\kappa(s)\mathbf{n}(s))'\big|_{s=0} = \kappa'\mathbf{n} + \kappa\mathbf{n}' = \kappa'\mathbf{n} - \kappa^2\mathbf{t} - \kappa\tau\mathbf{b},$$

Forma canónica local

Al sustituir en el desarrollo de Taylor, obtenemos

$$\begin{aligned}\alpha(s) &= \alpha(0) + s\mathbf{t} + \frac{s^2}{2}\kappa\mathbf{n} + \frac{s^3}{6}(\kappa'\mathbf{n} - \kappa^2\mathbf{t} - \kappa\tau\mathbf{b}) + o(s^3)\\ &= \alpha(0) + \left(s - \frac{\kappa^2 s^3}{6}\right)\mathbf{t} + \left(\frac{\kappa s^2}{2} - \frac{\kappa' s^3}{6}\right)\mathbf{n} - \left(\frac{\kappa\tau s^3}{6}\right)\mathbf{b} + o(s^3).\end{aligned}$$

Tomamos ahora un sistema de coordenasa $Oxyz$, de modo que el origen O coincide con $\alpha(0)$, $\mathbf{t} = (1,0,0)$, $\mathbf{n} = (0,1,0)$ y $\mathbf{b} = (0,0,1)$.

Entonces, la curva $\alpha(s) = (x(s), y(s), z(s))$ es dada por:

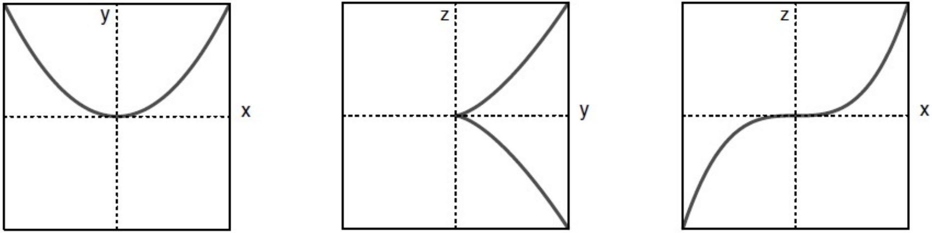
$$\begin{aligned}x(s) &= s - \tfrac{1}{6}\kappa^2 s^3 + o(s^3)_x,\\ y(s) &= \tfrac{1}{2}\kappa s^2 + \tfrac{1}{6}\kappa' s^3 + o(s^3)_y,\\ z(s) &= -\tfrac{1}{6}\kappa\tau s^3 + o(s^3)_z.\end{aligned}$$

Forma canónica local

Cuando s es muy pequeño, podemos aproximar la forma de $\alpha(s)$ por

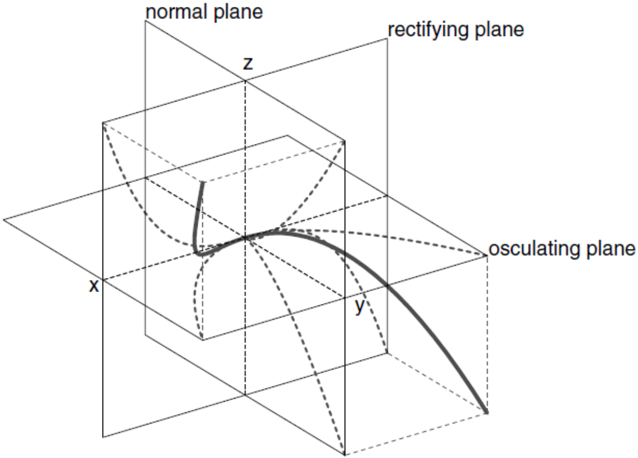
$$\begin{aligned} x(s) &\approx s, \\ y(s) &\approx \tfrac{1}{2}\kappa s^2, \\ z(s) &\approx -\tfrac{1}{6}\kappa\tau s^3. \end{aligned}$$

y esperamos obtener algo parecido a $y = \frac{1}{2}\kappa x^2$, $z = -\frac{1}{6}\kappa\tau x^3$, y $z^2 = \frac{2}{9}\frac{\tau^2}{\kappa}y^3$.



(a) Osculating plane (b) Normal plane (c) Rectifying plane

Forma canónica local



Forma canónica local de las curvas de Frenet.

Definición

*Sea $\alpha(s) : I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ una curva regular, parametrizada por longitud de arco, y de clase C^n. α es una **curva de Frenet** si en todo punto s, los vectores $\alpha'(s), \alpha''(s), \dots, \alpha^{(n-1)}(s)$ son l.i.*

*El **referencial de Frenet** de α se define como $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_n\}$ y está únicamente determinado por*

- $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_n\}$ *es una base ortonormal de* $\mathbb{R}^n$.
- *Para todo* $k = 1, \dots, n-1$, $\langle \mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_k \rangle = \langle \alpha'(s), \dots, \alpha^{(k)}(s) \rangle$.
- $\langle \alpha^{(k)}(s), \mathbf{e}_k \rangle > 0$, *para* $k = 1, \dots, n-1$.

Obs: Se puede usar el método de Gram-Schmidt para construir el referencial de Frenet a partir de las primeras $n-1$ derivadas α en s.

Teorema

Sea $\alpha : I \to \mathbb{R}^n$ una curva de Frenet en $\mathbb{R}^n$, con referencial de Frenet $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_n\}$. Entonces, existen funciones $\kappa_1, \kappa_2, \dots, \kappa_{n-1}$, definidas en I, con $\kappa_1, \dots, \kappa_{n-1} > 0$, tales que κ_i es de clase C^{n-1-i} y

$$\begin{pmatrix} \mathbf{e}_1' \\ \mathbf{e}_2' \\ \vdots \\ \vdots \\ \mathbf{e}_{n-1}' \\ \mathbf{e}_n' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \kappa_1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ -\kappa_1 & 0 & \kappa_2 & 0 & \ddots & \vdots \\ 0 & -\kappa_2 & 0 & \kappa_3 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & \ddots & \kappa_{n-2} & 0 \\ \vdots & \ddots & 0 & -\kappa_{n-2} & \dots & \kappa_{n-1} \\ 0 & \dots & 0 & 0 & -\kappa_{n-1} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{e}_1 \\ \mathbf{e}_2 \\ \vdots \\ \vdots \\ \mathbf{e}_{n-1} \\ \mathbf{e}_n \end{pmatrix}, \quad \forall s.$$

Definición

*κ_i se llama la **i-ésima curvatura de Frenet**, y el sistema anterior se llaman las **fórmulas de Frenet**.*

Prueba:

Como $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \ldots, \mathbf{e}_n\}$ es una base ortonormal de $\mathbb{R}^n$, podemos descomponer

$$\mathbf{e}_i' = \sum_{j=1}^{n} \langle \mathbf{e}_i', \mathbf{e}_j \rangle \mathbf{e}_j, \quad i = 1, \ldots, n.$$

Para cada $1 \leq i \leq n-1$, el vector $\mathbf{e}_i$ está en el subespacio generado por $\alpha'(s), \alpha''(s), \ldots, \alpha^{(i)}$,

$\Rightarrow$ $\mathbf{e}_i'$ está en el subespacio $\langle \alpha'(s), \alpha''(s), \ldots, \alpha^{(i+1)}(s) \rangle = \langle \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \ldots, \mathbf{e}_{i+1} \rangle$.

Luego,

$$\langle \mathbf{e}_i', \mathbf{e}_{i+2} \rangle = \langle \mathbf{e}_i', \mathbf{e}_{i+3} \rangle = \ldots = \langle \mathbf{e}_i', \mathbf{e}_n \rangle = 0.$$

Definimos $\kappa_i = \langle \mathbf{e}_i', \mathbf{e}_{i+1} \rangle$.

Por construcción del referencial de Frenet, para $1 \leq i \leq n-2$, el signo de $\langle \mathbf{e}_i', \mathbf{e}_{i+1} \rangle$ es el mismo signo de $\langle \alpha^{(i+1)}, \mathbf{e}_{i+1} \rangle$, el cual es positivo (condición 3).
De ahí que $\kappa_1, \kappa_2, \ldots, \kappa_{n-1} > 0$.

Por otro lado, como los $\mathbf{e}_i$ son ortonormales, tenemos $\langle \mathbf{e}_i, \mathbf{e}_j \rangle = 0$, $\forall i \neq j$.
Derivando en s,

$$\langle \mathbf{e}_i, \mathbf{e}_j \rangle' = \langle \mathbf{e}_i', \mathbf{e}_j \rangle + \langle \mathbf{e}_i, \mathbf{e}_j' \rangle = 0.$$

En particular, de la ecuación anterior

$$\langle \mathbf{e}_{i+1}', \mathbf{e}_i \rangle = \langle \mathbf{e}_i', \mathbf{e}_{i+1} \rangle = -\kappa_i. \square$$

UNIVERSIDAD DEL VALLE DE GUATEMALA

Curvas en $\mathbb{R}^n$

Comentarios:

- Una curva de Frenet en $\mathbb{R}^n$ está contenida en un hiperplano H si, y sólo si, $\kappa_{n-1} = 0$. Esto es equivalentemente a requerir que $\mathbf{e}_n$ sea un vector constante $\kappa_{n-1} = 0$, el cual es perpendicular a este hiperplano H.

- Como consecuencia, en ocasiones κ_{n-1} se llama la **torsión** de α.