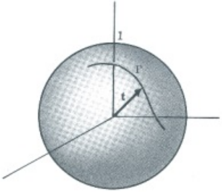
Teoría local de curvas parametrizadas

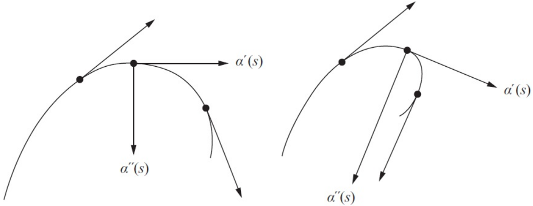
Alan Reyes-Figueroa
Geometría Diferencial (Aula 04b) 27.enero.2026

Teoría local de curvas en $\mathbb{R}^3$

Sea $\alpha : I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ una curva diferenciable, parametrizada por longitud de arco (α es clase C^3 y regular). Entonces $|\alpha'(s)| = 1$, para todo $s \in I$.



Como $|\alpha'(s)|$ es constante, la segunda derivada $|\alpha''(s)|$ mide la tasa de variación de la dirección de $\alpha'(s)$.
Así, $|\alpha''(s)|$ proporciona una medida de cuán rápido la curva α se aleja de la recta tangente:



Definición

*Sea $\alpha : I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ una curva diferenciable, parametrizada por longitud de arco. Definimos la **curvatura** de α en el punto s por*

$$\kappa(s) = |\alpha''(s)|.$$

- $\kappa(s) \geq 0$, ya que corresponde a la norma de un vector.
- Si $\alpha(s) = \mathbf{u} + \mathbf{v}s$ es una recta en $\mathbb{R}^3$, $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^3$, $\mathbf{v} \neq \mathbf{0}$, entonces

$$\alpha'(s) = \mathbf{v},\ \alpha''(s) = \mathbf{0},\ \forall s \ \Rightarrow\ \kappa(s) = 0,\ \forall s.$$

- Recíprocamente, si α es una curva tal que $\kappa(s) = 0$, $\forall s$, entonces $\alpha''(s) = 0$ y por integración, $\alpha(s) = \mathbf{u} + \mathbf{v}s$ es una recta.

Observe que $\alpha'(s) \cdot \alpha'(s) = |\alpha'(s)|^2 = 1$. Diferenciando respecto de s

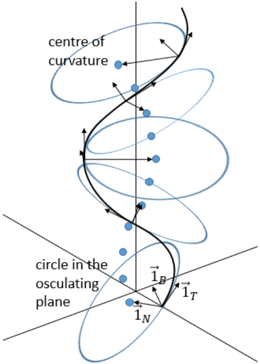
$$2\alpha''(s) \cdot \alpha'(s) = \alpha''(s) \cdot \alpha'(s) + \alpha'(s) \cdot \alpha''(s) = 0.$$

Luego, $\alpha''(s)$ y $\alpha'(s)$ son ortogonales.

Si $\alpha''(s) \neq \mathbf{0}$, podemos definir un vector unitario $\mathbf{n}(s)$ en la dirección de $\alpha''(s)$ por

$$\alpha''(s) = \kappa(s)\mathbf{n}(s).$$

Además, denotamos $\mathbf{t}(s) = \alpha'(s)$.



UNIVERSIDAD DEL VALLE DE GUATEMALA

Curvatura y torsión

Tenemos entonces

$$\mathbf{n}(s) \perp \mathbf{t}(s), \quad \forall s \text{ donde } \kappa(s) \neq 0.$$

El vector $\mathbf{t}(s)$ es el vector tangente a α en s. El vector $\mathbf{n}(s)$ se llama el vector normal a α en s. El plano generado por $\langle \mathbf{t}(s), \mathbf{n}(s) \rangle$ se llama el **plano osculador** o **plano osculante** a α en s.

Obs: Si $\alpha''(s) = \mathbf{0}$, el vector $\mathbf{n}(s) = \mathbf{0}$ y el plano osculador no está definido. Los puntos donde $\alpha''(s) = \mathbf{0}$ se llaman *puntos singulares de orden 1* (los puntos donde $\alpha'(s)$ se llaman *puntos singulares de orden 0*).

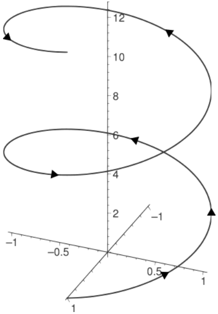
En lo que sigue, nos restringimos a curvas sin puntos singulares de orden 0 ó 1.

El vector unitario

$$\mathbf{b}(s) = \mathbf{t}(s) \times \mathbf{n}(s)$$

es normal al plano osculador y se llama el **vector binormal** a α en s.

Como $|\mathbf{b}(s)| = |\mathbf{t}(s)| \cdot |\mathbf{n}(s)| = 1$, entonces $|\mathbf{b}(s)|$ mide la tasa de variación del ángulo del plano osculador en una vecindad de s.



Curvatura y torsión

Tenemos varias relaciones entre $\mathbf{t}(s)$, $\mathbf{n}(s)$ y $\mathbf{b}(s)$:

- $\mathbf{t}'(s) = \alpha''(s) = \kappa(s)\mathbf{n}(s)$.

- $$\begin{aligned} \mathbf{b}'(s) &= \big(\mathbf{t}(s) \times \mathbf{n}(s)\big)' = \mathbf{t}'(s) \times \mathbf{n}(s) + \mathbf{t}(s) \times \mathbf{n}'(s) \\ &= \underbrace{\big(\kappa(s)\mathbf{n}(s) \times \mathbf{n}(s)\big)}_{=0} + \mathbf{t}(s) \times \mathbf{n}'(s) \\ &= \mathbf{t}(s) \times \mathbf{n}'(s) \end{aligned}$$

Luego, $\mathbf{b}'(s) \perp \mathbf{t}(s)$, y como $\mathbf{b}'(s) \perp \mathbf{b}(s)$ (¿por qué?), entonces $\mathbf{b}'(s)$ es paralelo a $\mathbf{n}(s)$.

De ahí que podemos escribir $\mathbf{b}'(s) = \tau(s)\mathbf{n}(s)$.

Definición

*El número $\tau(s)$ se llama la **torsión** de α en el punto s*

- Contrario a la curvatura, $\tau(s)$ puede ser positiva o negativa, ó cero.
- Si $\alpha(s)$ es una curva plana, entonces $\alpha(I)$ está contenida en un plano, el cual coincide con el plano osculador $\langle \mathbf{t}(s), \mathbf{n}(s) \rangle$, $\forall s$. Consecuentemente, $\tau(s) = 0$, $\forall s$.
- Recíprocamente, si $\tau(s) = 0$, $\forall s$, entonces $\mathbf{b}'(s) = 0 \cdot \mathbf{n}(s) = \mathbf{0} \Rightarrow \mathbf{b}(s)$ es constante, digamos $\mathbf{b}(s) = \mathbf{b}_0 \in \mathbb{R}^3$. Luego,

$$\big(\alpha(s) \cdot \mathbf{b}_0\big)' = \alpha'(s) \cdot \mathbf{b}_0 = \mathbf{t}(s) \cdot \mathbf{b}_0 = 0.$$

  Luego $\alpha(s) \cdot \mathbf{b}_0$ es constante $= 0 \Rightarrow \alpha$ es una curva contenida en un plano normal a $\mathbf{b}_0$, y α es una curva plana.

UNIVERSIDAD DEL VALLE DE GUATEMALA