Teoría local de curvas parametrizadas

Alan Reyes-Figueroa

Geometría Diferencial (Aula 04a) 27.enero.2026

Curvas planas

Sea $\alpha : I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ una curva regular ($\alpha' \neq 0$), parametrizada por longitud de arco. Denotamos al vector tangente como

$$\mathbf{t}(s) = \alpha'(s), \quad \forall s \in I.$$

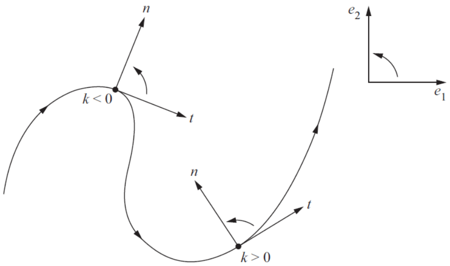
Definimos un vector normal unitario $\mathbf{n}(s) \in \mathbb{R}^2$ de modo que las bases ortonormales $\{\mathbf{t}(s), \mathbf{n}(s)\}$ y $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2\}$ tengan la misma orientación.

Como $\mathbf{t}(s) \cdot \mathbf{t}(s) = |\mathbf{t}(s)|^2 = 1$, diferenciando respecto de s

$$2\mathbf{t}'(s) \cdot \mathbf{t}(s) = \mathbf{t}'(s) \cdot \mathbf{t}(s) + \mathbf{t}(s) \cdot \mathbf{t}'(s) = 0.$$

Luego, $\mathbf{t}(s)$ y $\mathbf{t}'(s)$ son ortogonales, y se tiene que

$$\alpha''(s) = \mathbf{t}'(s) = \kappa(s)\mathbf{n}(s).$$



Definición

*El número $\kappa(s)$ se llama la **curvatura** de α en el punto s.*

A la recta generada por el vector $\mathbf{n}(s)$ se le llama la **recta normal**.

El signo de $\kappa(s)$ indica la dirección en la cual rota la curva α (o su tangente). $\kappa(s) > 0$ indica que la curva rota a la izquierda, $\kappa < 0$ indica que rota hacia la derecha.

Definición

*Los puntos donde $\alpha''(s) = 0$ se llaman **puntos de inflexión**, y corresponden a aquellos puntos donde la curvatura κ cambia de signo.*

Curvas planas

Consideremos la matriz de rotación $R = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \in O(2)$, la cual rota cualquier vector de $\mathbb{R}^2$ un total de 90° en el sentido positivo.

Tenemos que los vectores unitarios **t** y **n** están relacionados mediante

$$\mathbf{n}(s) = R\,\mathbf{t}(s) \qquad \text{y} \qquad -\mathbf{t}(s) = R\,\mathbf{n}(s).$$

Derivando la primera ecuación, tenemos

$$\mathbf{n}'(s) = \big(R\,\mathbf{t}(s)\big)' = R\,\mathbf{t}'(s). \tag{1}$$

Por otro lado, como $\mathbf{t}'(s) = \kappa(s)\mathbf{n}(s)$, multiplicando esta ecuación por R, resulta

$$R\,\mathbf{t}'(s) = R\big(\kappa(s)\mathbf{n}(s)\big)\big) = \kappa(s)\,R\,\mathbf{n}(s) = -\kappa(s)\mathbf{t}(s). \tag{2}$$

Así, juntando las ecuaciones (1) y (2), obtenemos

$$\mathbf{n}'(s) = -\kappa(s)\mathbf{t}(s).$$

Curvas planas

Como resultado, se tiene el siguiente sistema de EDOs

$$\mathbf{t}'(s) = \kappa(s)\mathbf{n}(s), \quad \mathbf{n}'(s) = -\kappa(s)\mathbf{t}(s),$$

o en notación matricial

$$\begin{pmatrix} \mathbf{t}'(s) \\ \mathbf{n}'(s) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \kappa(s) \\ -\kappa(s) & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{t}(s) \\ \mathbf{n}(s) \end{pmatrix}.$$

Estas ecuaciones son llamadas las **fórmulas de Frenet.**

Curvas planas

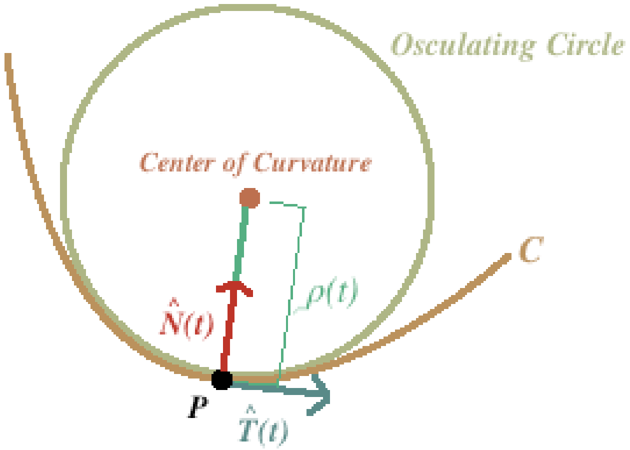
Fijemos $s \in I$, y sea $P = \alpha(s)$, y sea ℓ la recta normal a α en P. Tomemos otro punto de la curva $Q = \alpha(s+h)$. Consideremos la recta normal m a α en Q. Y sea C el punto de intersección de las rectas ℓ y m.

Es posible mostrar que al tomar $h \to 0$, el punto C se estabiliza. Este punto resulta ser el centro de un círculo, que es tangencial a la curva en el punto P,

Definición

*Este círculo con centro C tangente a la cuva α en el punto $\alpha(s) = P$ se llama el **círculo osculador** a α en s.*

Curvas planas



Ejemplo:
Consideremos un círculo de radio $r > 0$ en $\mathbb{R}^2$. Su parametrización por longitud de arco es

$$\alpha(s) = (r\cos\tfrac{s}{r}, r\sin\tfrac{s}{r}), \quad s \in \mathbb{R}.$$

Luego, $\mathbf{t}(s) = \alpha'(s) = (-\sin\frac{s}{r}, \cos\frac{s}{r})$, $\mathbf{n}(s) = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \mathbf{t}(s) = (-\cos\frac{s}{r}, -\sin\frac{s}{r})$ y $\alpha''(s) = (-\frac{1}{r}\cos\frac{s}{r}, -\frac{1}{r}\sin\frac{s}{r})$.
De ahí que

$$\mathbf{t}' = \tfrac{1}{r}\mathbf{n} \Rightarrow \kappa(s) = \tfrac{1}{r}, \ \ \forall s.$$

- Si α es un círculo, su curvatura $\kappa(s)$ es constante.

Teorema

Teorema: Una curva plana regular α tiene curvatura constante si, y sólo si, α es un trazo de circunferencia, o α es un segmento de recta.

<u>Prueba</u>:

- Caso $\kappa = 0$: $\kappa(s) = 0 \Leftrightarrow \alpha''(s) = \mathbf{0} \Leftrightarrow \alpha(s) = \mathbf{u} + \mathbf{v}s$ es una recta.

- Caso $\kappa > 0$: $(\Leftarrow)$ Acabamos de mostrar que un círculo tiene curvatura constante. $(\Rightarrow)$ Considere la cantidad $\alpha(s) + \frac{1}{\kappa}\mathbf{n}(s)$. Observe que al derivar

$$\left(\alpha(s) + \tfrac{1}{\kappa}\mathbf{n}(s)\right)' = \mathbf{t}(s) - \tfrac{1}{\kappa}\kappa\mathbf{t}(s) = \mathbf{t}(s) - \mathbf{t}(s) = \mathbf{0},$$

de modo que $\alpha(s) + \frac{1}{\kappa}\mathbf{n}(s) = C$ es constante. Esto muestra que α es un trazo de circunferencia con centro en C.

Curvas planas

- Toda curva plana regular α, con curvatura no nula en el punto s, posee un círculo centrado en $C(s)$:

$$C(s) = \alpha(s) + \tfrac{1}{\kappa(s)}\mathbf{n}(s),$$

  su *círculo osculador*.
- Este círculo es tangente a α en el punto s (punto de contacto de orden 2).
- La curva $C(s)$ formada por todos los centros de estos círculos osculadores a α, $s \mapsto \alpha(s) + \tfrac{1}{\kappa(s)}\mathbf{n}(s)$, se llama la **evoluta** o **curva focal** de α.

Proposición

Sea α una curva plana regular. El radio de círculo osculador de α en s está dado por $\rho(s) = 1/\kappa(s)$.