

## **CURVAS PARAMETRIZADAS**

ALAN REYES-FIGUEROA  
GEOMETRÍA DIFERENCIAL

(AULA 02) 20.ENERO.2026

## Definición

Una **curva parametrizada**  $\alpha$  en  $\mathbb{R}^n$  es una aplicación diferenciable definida en un intervalo abierto  $(a, b) \subseteq \mathbb{R}$ ,  $\alpha : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}^n$ .

$$\alpha(t) = (x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t)) \in \mathbb{R}^n, \text{ para } t \in (a, b).$$

- La función  $\alpha$  lleva el parámetro  $t \in (a, b)$  en un punto  $\alpha(t)$  de  $\mathbb{R}^n$ .
- Cuando decimos que  $\alpha$  es diferenciable, usualmente entenderemos estos como que  $\alpha$  es clase  $C^\infty$  (infinitamente diferenciable).  
**Obs!** En el libro de Do Carmo, diferenciable =  $C^\infty$ . Cuidado!, en otros textos, diferenciable =  $C^1$ . Cuando sea conveniente, indicaremos explícitamente que  $\alpha$  es de clase  $C^k$ .
- Entenderemos intervalo abierto en el sentido amplio (incluimos los casos  $a = -\infty$ ,  $b = \infty$ ).

# Curvas parametrizadas

Sea  $\alpha(t)$  una curva de clase  $C^1$  en  $\mathbb{R}^n$ . La derivada

$$\alpha'(t) = (x'_1(t), x'_2(t), \dots, x'_n(t)) \in \mathbb{R}^n$$

será llamada el **vector tangente** (o *vector velocidad*) de  $\alpha$  en el punto  $t$ .

Si  $I = (a, b)$ , la imagen  $\alpha(I)$  se llama el **trazo** de la curva  $\alpha$ .

- No se debe confundir a la curva  $\alpha$  con su trazo. Pueden existir diferentes curvas, todas con un mismo trazo o imagen.

# Ejemplo

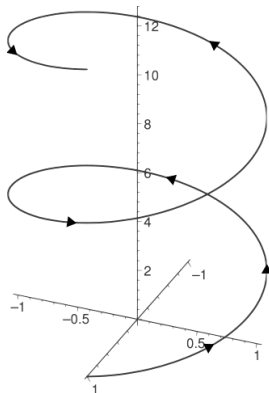
Dados  $a, b, c \in \mathbb{R}$ , la curva parametrizada

$$\alpha(t) = (a \cos ct, a \sin ct, bt), \quad t \in \mathbb{R}$$

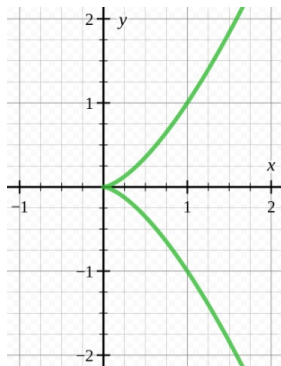
tiene por trazo una hélice de paso  $2\pi b$  sobre el cilindro  $x^2 + y^2 = a^2$  en  $\mathbb{R}^3$ .

$\alpha$  es una curva parametrizada diferenciable (de clase  $C^\infty$ ). Su vector tangente está dado por

$$\alpha'(t) = (-ac \sin ct, ac \cos ct, b) \in \mathbb{R}^3.$$



# Ejemplo



$$y^2 = x^3.$$

La aplicación  $\alpha(t) = (t^2, t^3)$ , con  $t \in \mathbb{R}$ , es una curva parametrizada diferenciable (clase  $C^\infty$ ). Su trazo es una cúspide.

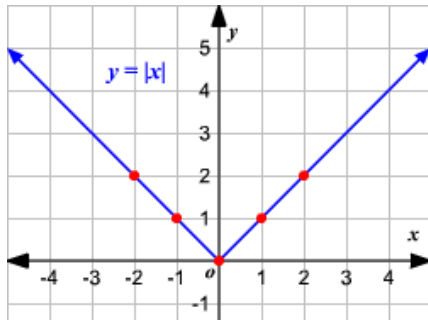
Su derivada es  $\alpha'(t) = (2t, 3t^2)$ . Observe que en  $t = 0$ ,  $\alpha(0) = (0, 0)$  y su vector tangente es  $\alpha'(0) = (0, 0)$ .

Observe que  $\beta(t) = (t^{2/3}, t)$ , con  $t \in \mathbb{R}$ , es otra parametrización de la curva, pero no es diferenciable en  $t = 0$ .

Cuando sea conveniente, identificaremos una curva  $\alpha$  en  $\mathbb{R}^m$  a una curva en  $\mathbb{R}^{m+p}$  mediante una inclusión  $\alpha(t) = (x_1(t), \dots, x_m(t)) \longrightarrow (x_1(t), \dots, x_m(t), 0, 0, \dots, 0)$ .

# Ejemplo

La curva  $\alpha : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$  dada por  $\alpha(t) = (t, |t|)$ , no es una curva diferenciable en  $t = 0$ . En este caso,  $\alpha$  sólo es de clase  $C^0$ .



# Ejemplos

Las curvas parametrizadas  $\alpha : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$  y  $\beta : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$  dadas por

$$\begin{aligned}\alpha(t) &= (\cos t, \sin t) \\ \beta(t) &= (\cos 2t, \sin 2t)\end{aligned}$$

ambas poseen el mismo trazo (el círculo unitario  $S^1$ ). Observe que el vector velocidad de la curva  $\beta$  es el doble del de la curva  $\alpha$ .

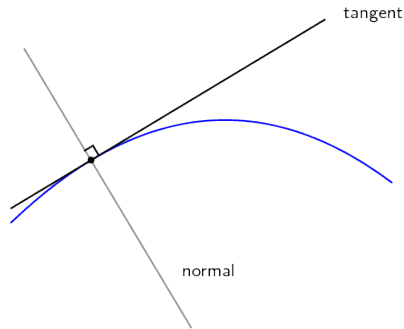
$$\begin{aligned}\alpha'(t) &= (-\sin t, \cos t) & |\alpha'| &= 1, \\ \beta'(t) &= (-2\sin 2t, 2\cos 2t) & |\beta'| &= 2.\end{aligned}$$

(la curva  $\beta$  recorre el círculo el doble de rápido que  $\alpha$ ).

# Curvas parametrizadas

Sea  $\alpha$  una curva parametrizada de clase  $C^1$  en  $\mathbb{R}^n$ . Si  $\alpha'(t) \neq \mathbf{0}$  en un punto  $\mathbf{p} = \alpha(t)$ , entonces en el punto  $\mathbf{p}$  está bien definida una recta en la dirección de  $\mathbf{v} = \alpha'(t)$ .

Esta se llama la **recta tangente** a  $\alpha$  en el punto  $\mathbf{p}$ .



- Esta recta es esencial para el desarrollo de la geometría diferencial de curvas.
- Usualmente requeriremos que una curva  $\alpha$  tenga recta tangente definida en todos sus puntos.



## Definición

Sea  $\alpha : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}^n$  una curva parametrizada de clase  $C^1$ . Si para algún  $t \in (a, b)$  se tiene que  $\alpha'(t) = \mathbf{0}$ , entonces diremos que  $t$  es un **punto singular** de  $\alpha$ .

Un punto  $t \in (a, b)$  donde  $\alpha'(t) \neq \mathbf{0}$  se llama un **punto regular** de  $\alpha$ .

## Definición

Una curva  $\alpha : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}^n$  de clase  $C^1$  tal que  $\alpha'(t) \neq \mathbf{0}$ , para todo  $t \in (a, b)$ , se llama una **curva parametrizada regular**.

**Obs!** De ahora en adelante nos limitamos a estudiar curvas regulares.

# Longitud de arco

## Definición

Sea  $\alpha : I = (c_1, c_2) \rightarrow \mathbb{R}^n$  una curva regular de clase  $C^1$ . La **longitud de arco** de  $\alpha$ , a partir de punto  $t_0 \in I$  es

$$s(t) = \int_{t_0}^t |\alpha'(\tau)| d\tau.$$

¿Por qué se define así la longitud de arco?

Recordemos que si  $[a, b] \subset I$  y  $t_0 = a < t_1 < t_2 < \dots < t_k = b$  es una partición del intervalo  $[a, b]$ , podemos definir una poligonal  $P = \{P_0, P_1, \dots, P_k\}$ , con  $P_i = \alpha(t_i)$ ,  $i = 0, 1, 2, \dots, k$ .

# Longitud de arco

La longitud de esta poligonal es

$$\ell(\alpha, P) = \sum_{i=1}^k |P_i - P_{i-1}| = \sum_{i=1}^k |\alpha(t_i) - \alpha(t_{i-1})|.$$

Por el Teorema del Valor Medio, como  $\alpha$  es diferenciable (en todo punto), para cada  $i = 1, 2, \dots, k$ , existen  $\xi_i \in (t_{i-1}, t_i)$  tales que

$$|\alpha(t_i) - \alpha(t_{i-1})| = |\alpha'(\xi_i) \cdot (t_i - t_{i-1})| = |\alpha'(\xi_i)| \Delta t_i.$$

Luego  $\ell(\alpha, P) = \sum_{i=1}^k |\alpha'(\xi_i)| \Delta t_i$ , y tomando el límite en la norma de la partición, obtenemos

$$s = \lim_{\Delta P \rightarrow 0} \ell(\alpha, P) = \int_{t_0}^t |\alpha'(\tau)| d\tau.$$

# Longitud de arco

Como  $\alpha'(t) \neq 0$  para todo  $t$ , la función  $s(t)$  es diferenciable y

$$\frac{ds}{dt} = \frac{d}{dt} \int_{t_0}^t |\alpha'(\tau)| d\tau = |\alpha'(t)|.$$

Puede ocurrir que  $t$  ya sea la longitud de arco de la curva  $\alpha$  medido a partir de cierto punto  $t_0$ . En este caso,  $|\alpha'(t)| = \frac{ds}{dt} = 1$ .

Recíprocamente, si  $|\alpha'(t)| = 1$ , entonces

$$s = \int_{t_0}^t |\alpha'(\tau)| d\tau = \int_{t_0}^t d\tau = t - t_0.$$

Así,  $s$  y  $t$  difieren apenas por una constante. En particular,  $s = t - t_0$  es precisamente la longitud del intervalo  $[t_0, t]$ . La longitud de este intervalo coincide con la longitud del tramo de la curva entre  $t_0$  y  $t$ , exactamente cuando  $t_0 = 0$  y  $s = t$ .