

Geometría Diferencial 2025

Lista 05

29.abril.2025

1. Determinar las curvas asintóticas del catenoide

$$\mathbf{x}(u, v) = (\cosh u \cos v, \cosh u \sin v, v), \quad u, v \in \mathbb{R}.$$

2. Considere la superficie de Enneper

$$\mathbf{x}(u, v) = \left(u - \frac{u^3}{3} + uv^2, v - \frac{v^3}{3} + vu^2, u^2 - v^2\right), \quad u, v \in \mathbb{R},$$

y mostrar que

- a) Los coeficientes de la primera forma fundamental son

$$E = G = (1 + u^2 + v^2)^2, \quad F = 0.$$

- b) Los coeficientes de la segunda forma fundamental son

$$e = 2, \quad g = -2, \quad f = 0.$$

- c) Las curvaturas principales están dadas por

$$\kappa_1 = \frac{2}{(1 + u^2 + v^2)^2}, \quad \kappa_2 = -\frac{2}{(1 + u^2 + v^2)^2}.$$

- d) Las líneas de curvatura son las curvas coordenadas.

- e) Las curvas asintóticas son de la forma $u + v = \text{const.}$, $u - v = \text{const.}$

3. (La Pseudoesfera)

Consideramos la curva *tractriz* (ver ejercicio 3 en Lista 01).

- a) Determine la superficie de revolución que se obtiene a partir de la tractriz, y hallar una parametrización alrededor de un punto regular.

- b) Muestre que la curvatura gaussiana de esta superficie en todo punto regular vale $K = -1$.

4. Sea $\mathbf{x}(u, v)$ un segmento de una superficie regular (orientable) S . Una **superficie paralela** a S es una superficie parametrizada por

$$\mathbf{y}(u, v) = \mathbf{x}(u, v) + aN(u, v),$$

donde $a \in \mathbb{R}$ y N es el campo normal unitario a $\mathbf{x}$.

- a) Muestre que $\mathbf{y}_u \times \mathbf{y}_v = (1 - 2Ha + Ka^2)\mathbf{x}_u \times \mathbf{x}_v$, donde H y K son las curvaturas media y gaussiana de $\mathbf{x}$.

- b) Pruebe que en los puntos regulares, las curvaturas media y gaussiana de $\mathbf{y}$ son

$$H_{\mathbf{y}} = \frac{K}{1 - 2Ha + Ka^2}, \quad K_{\mathbf{y}} = \frac{H - Ka}{1 - 2Ha + Ka^2}.$$

5. Consideramos la parametrización usual del toro $\mathbb{T}^2$, y definimos un mapa $\Phi : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{T}^2$ dado por

$$\Phi(u, v) = ((R + r \cos u) \cos v, (R + r \cos u) \sin v, r \sin u), \quad R > r > 0.$$

Sea $u = at$, $v = bt$ una recta en $\mathbb{R}^2$ pasando por $(0, 0) \in \mathbb{R}^2$, y considere la curva sobre el toro dada por $\alpha(t) = \Phi(at, bt)$. Muestre que

- a) Φ es un difeomorfismo local.
 - b) La curva $\alpha(t)$ es una curva regular; $\alpha(t)$ es una curva cerrada si, y sólo si, $\frac{b}{a}$ es un número racional.
 - c) Pruebe o de evidencia empírica de lo siguiente: Si $\frac{b}{a}$ es irracional, la curva $\alpha(t)$ es densa en $\mathbb{T}^2$.
6. Mostrar la **ecuación de Gauss**. Si S es una superficie con parametrización ortogonal, $F = 0$, entonces

$$K = -\frac{1}{\sqrt{EG}} \left[\frac{\partial}{\partial v} \left(\frac{E_v}{\sqrt{EG}} \right) + \frac{\partial}{\partial u} \left(\frac{G_u}{\sqrt{EG}} \right) \right].$$
