Geometría Diferencial 2025

Lista 04

25.marzo.2025

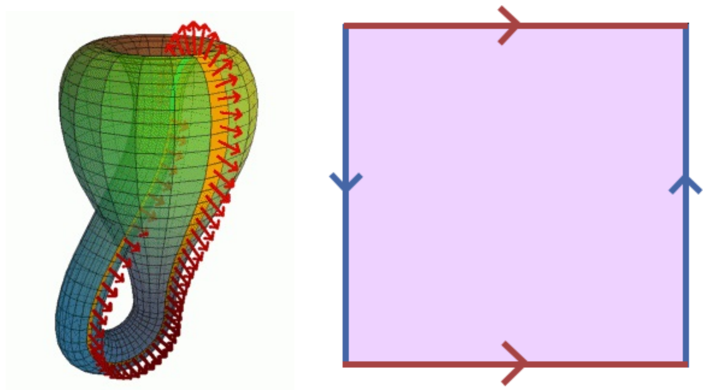
1. Mostrar que la ecuación del plano tangente en $\mathbf{p} = (x_0, y_0, z_0)$ a una superficie regular $S : f(x, y, z) = 0$, con 0 un valor regular de f es
$$f_x(\mathbf{p})(x - x_0) + f_y(\mathbf{p})(y - y_0) + f_z(\mathbf{p})(z - z_0) = 0.$$
¿Cómo queda la ecuación del plano tangente en el caso de una superfície regular de la forma $z = f(x, y)$?

2. Pruebe que las normales a una superficie parametrizada de la forma
$$\mathbf{x}(u, v) = \big(f(u)\cos v, f(u)\sin v, g(u)\big), \quad f(u) \neq 0,\ g'(u) \neq 0,$$
pasan todas por el eje Oz.

3. Un punto crítico de una función diferenciable $f : S \to \mathbb{R}$ definida sobre una superficie regular S es un punto $\mathbf{p} \in S$ tal que $Df(\mathbf{p}) = 0$.
   a) Si $f : S \to \mathbb{R}$ es dada por $f(\mathbf{p}) = |\mathbf{p} - \mathbf{p}_0|$, con $\mathbf{p}_0 \notin S$, mostrar que $\mathbf{p}$ es punto crítico de f si, y sólo si, la recta de $\mathbf{p}$ a $\mathbf{p}_0$ es normal a S.
   b) Si $h : S \to \mathbb{R}$ es dada por $h(\mathbf{p}) = \mathbf{p} \cdot \mathbf{v}$, $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^3$ vector unitario, mostrar que $\mathbf{p}$ es punto crítico de f si, y sólo si, $\mathbf{v}$ es un vector normal a S en $\mathbf{p}$.

4. La orientación puede no ser preservada por difeomorfismos.
Sea $\varphi : S_1 \to S_2$ un difeomorfismo entre superficies.
   a) Muestre que S_1 es orientable si, y sólo si, S_2 es orientable.
   b) Considere la aplicación antípoda $\varphi : S^2 \to S^2$ dada por $\varphi(\mathbf{p}) = -\mathbf{p}$. Utilizar esta aplicación para mostrar que en (a), la orientación inducida por φ puede ser distinta de la original.

5. Mostrar que la botella de Klein $\mathbb{K}$ no es orientable. Para ello, puede considerar el siguiente modelo de la botella de Klein:
$$\mathbb{K} = [0,1] \times [0,1] \ / \sim, \quad \text{donde } (u,0) \sim (u,1),\ \text{y } (0,v) \sim (1, 1-v),$$
u otro modelo similar, como se ilustra en la Figura 1.



$\mathbb{K}$

Figure 1: Botella de Klein. (a) como superficien en $\mathbb{R}^3$, (b) como espacio cociente.