

Geometría Diferencial 2025

Lista 03

06.marzo.2025

1. Mostrar que el cilindro $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 = 1\}$ es una superficie regular, y encuentre parametrizaciones que cubran dicha superficie. Mostrar que el cono $C : x^2 + y^2 = z^2$ no es una superficie regular.
2. Sea $f(x, y, z) = z^2$. Muestre que 0 no es un valor regular de f y que aún así, $f^{-1}(0)$ es una superficie regular.
3. Sea $f(x, y, z) = (x + y + z - 1)^2$.
 - a) Localizar los puntos críticos y valores críticos de f .
 - b) ¿Para qué valores de c el conjunto $f(x, y, z) = c$ es una superficie regular?
 - c) Responder las preguntas en (a) y (b) para la función $g(x, y, z) = xyz^2$.

4. Probar que $\mathbf{x} : U \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ dada por

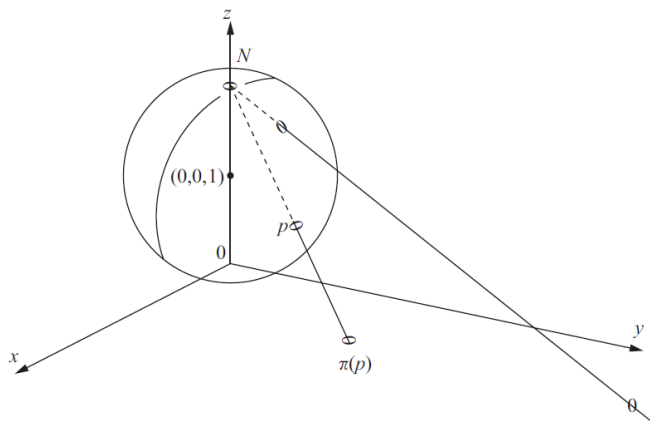
$$\mathbf{x}(u, v) = (a \sin u \cos v, b \sin u \sin v, c \cos u), \quad a, b, c \neq 0,$$

con $0 < u < \pi, 0 < v < 2\pi$, es una parametrización para el elipsoide $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$.
Describir geoméricamente las curvas $u = \text{const}$ y $v = \text{const}$ sobre el elipsoide.

5. Una forma de definir un sistema de coordenadas para la esfera S^2 , dada por $x^2 + y^2 + (z-1)^2 = 1$, es considerar la **proyección estereográfica** $\pi : S^2 - \{N\} \rightarrow \mathbb{R}^2$ que lleva el punto $\mathbf{p} = (x, y, z)$ en la esfera S^2 menos el polo norte $N = (0, 0, 2)$ sobre la intersección del plano xy con la recta que conecta N con $\mathbf{p}$ (Fig. abajo). Sea $(u, v) = \pi(x, y, z)$, donde $(x, y, z) \in S^2 - \{N\}$ y $(u, v) \in \text{plano } xy$.

- a) Pruebe que $\pi^{-1} : \mathbb{R}^2 \rightarrow S^2$ está dada por

$$x = \frac{4u}{u^2 + v^2 + 4}, \quad y = \frac{4v}{u^2 + v^2 + 4}, \quad z = \frac{2(u^2 + v^2)}{u^2 + v^2 + 4}.$$



- b) Muestre que es posible, usando la proyección estereográfica, cubrir la esfera con dos cartas locales.

6. Sea $S^2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$ la esfera unitaria y sea $A : S^2 \rightarrow S^2$ el mapa antipodal $A(x, y, z) = (-x, -y, -z)$. Pruebe que A es un difeomorfismo.
7. Sea $S \subseteq \mathbb{R}^3$ una superficie regular y sea $\pi : S \rightarrow \mathbb{R}^2$ el mapa que toma cada punto $p \in S$ y lo lleva a su proyección ortogonal sobre $\mathbb{R}^2$. ¿Es π diferenciable?
8. a) Mostrar que el paraboloides $z = x^2 + y^2$ es difeomorfo al plano.
- b) Construir un difeomorfismo entre el elipsoide $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$ y la esfera unitaria $S^2 : x^2 + y^2 + z^2 = 1$.
-