Geometría Diferencial 2025

Lista 02

18.febrero.2025

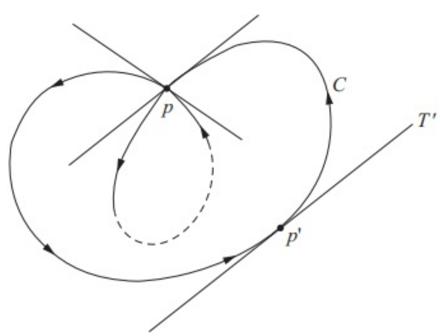
1. Let α una curva de Frenet en $\mathbb{R}^n$. Muestre que $\det[\alpha', \alpha'', \alpha''', \dots, \alpha^{(n)}] = \prod_{i=1}^{n-1} \kappa_i^{(n-i)}$.

2. Construir una curva, no planar, de clase C^∞ en $\mathbb{R}^3$, que sea una curva de Frenet, excepto en un único punto, y que fuera de ese punto, satisface $\tau \equiv 0$.

3. (a) Sea $\alpha : [0, L] \to \mathbb{R}^2$ una curva plana, cerrada y simple, parametrizada por longitud de arco. Suponga que $0 \leq \kappa(s) \leq c$, $\forall s \in [0, L]$, para alguna constante $c > 0$. Probar que $L \geq \frac{2\pi}{c}$.
(b) Si reemplazamos la hipótesis de α ser simple por α tiene índice de rotación I, probar que $L \geq \frac{2\pi I}{c}$.

4. Sea $\alpha : [0, L] \to \mathbb{R}^2$ una curva plana, cerrada y convexa, orientada de forma positiva. La curva
$$\beta(s) = \alpha(s) - r\mathbf{n}(s),$$
donde $r > 0$ es una constante positiva y $\mathbf{n}(s)$ es el vector normal de α en s, se llama una *curva paralela* a α. Muestre que
   a) $\ell(\beta) = \ell(\alpha) + 2\pi r$.
   b) $A(\beta) = A(\alpha) + rL + \pi r^2$.
   c) $\kappa_\beta(s) = \dfrac{\kappa_\alpha(s)}{1 + r\kappa_\alpha(s)}$.

5. Sea $C : [0, L] \to \mathbb{R}^2$ una curva plana, cerrada, orientada positivamente, con $\kappa > 0$. Asuma que C posee al menos un punto de auto-intersección $\mathbf{p}$. Demostrar que
   a) C posee al menos una tangente doble.
   b) Existe un punto $\mathbf{p}'$ cuya tangente a α en $\mathbf{p}'$ es paralela a la tangente a α en $\mathbf{p}$.
   c) El ángulo de rotación de la tangente en el arco positivo de C dado por $\mathbf{pp'p}$ es mayor a π.
   d) El índice de rotación de C es $I \geq 2$.



6. Hallar todos los vértices del limaçon con ecuaciones paramétricas
$$\gamma(t) = \big((b + a\cos t)\cos t,\, (b + a\cos t)\sin t\big), \qquad a, b > 0.$$
Considerar los casos (i) $a > b$, (ii) $a < b$, (iii) $a = b$.