Geometría Intrínseca de Superficies

Alan Reyes-Figueroa

Geometría Diferencial (Aula 31) 06.mayo.2025

Geometría intrínseca de superficies

Sea $S \subset \mathbb{R}^3$ una superficie regular orientada, y sea $\mathbf{x} : U \subseteq \mathbb{R}^2 \to S$ una parametrización. Tenemos asociadas seis aplicaciones $E, F, G, e, f, g : U \to \mathbb{R}$ correspondientes a los coeficientes de la primera y segunda forma fundamental.

Definición

*Diremos que una cantidad asociada a la superficie S es **intrínseca** si es posible escribirla en términos de la primera forma fundamental (como función de los coeficientes E, F, G). Una cantidad es **extrínseca** si depende de la segunda forma fundamental.*

- La geometría intrínseca es la geometría que seres bidimensionales puros pueden reconocer, sin ningún conocimiento de la tercera dimensión.

Geometría intrínseca de superficies

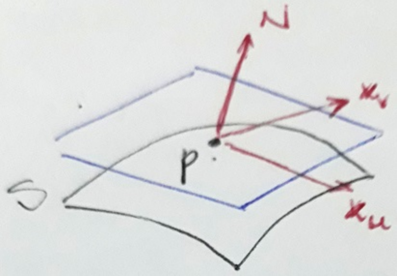
Estamos interesados en responder:

- ¿Qué condiciones sobre las funciones E, F, G, e, f, g garantizan que estas provengan de alguna parametrización de una superficie? En ese caso, ¿la superficie queda únicamente determinada a menos de movimientos rígidos?

- ¿Cuáles cantidades geométricas asociadas a una superficie son intrínsecas? Seguramente ángulos y las longitudes se encuentran entre estas propiedades. La pregunta que surge en particular, si alguna de las las cantidades de curvatura son de este tipo.

Recordemos que $g_{ij} = \langle \mathbf{x}_i, \mathbf{x}_j \rangle$, $h_{ij} = \langle N, \mathbf{x}_{ij} \rangle$, $a_{ij} = \langle N_i, \mathbf{x}_j \rangle$, con

$$DN = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} h_{11} & h_{12} \\ h_{21} & h_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{21} & g_{22} \end{pmatrix}^{-1}.$$



Sea S superficie regular orientada, $\mathbf{x} = \mathbf{x}(u, v)$ su parametrización. Consideramos el triedro local formado por $\mathbf{x}_u, \mathbf{x}_v$ y N (base local de $\mathbb{R}^3$).

Podemos escribir los vectores $\mathbf{x}_{uu}$, $\mathbf{x}_{uv}$, $\mathbf{x}_{vu}$, $\mathbf{x}_{vv}$, N_u, N_v en términos de esta base.

$$\left.\begin{array}{rcl} \mathbf{x}_{uu} & = & \Gamma^u_{uu}\mathbf{x}_u + \Gamma^v_{uu}\mathbf{x}_v + h_{uu}N, \\ \mathbf{x}_{uv} & = & \Gamma^u_{uv}\mathbf{x}_u + \Gamma^v_{uv}\mathbf{x}_v + h_{uv}N, \\ \mathbf{x}_{vu} & = & \Gamma^u_{vu}\mathbf{x}_u + \Gamma^v_{vu}\mathbf{x}_v + h_{vu}N, \\ \mathbf{x}_{vv} & = & \Gamma^u_{vv}\mathbf{x}_u + \Gamma^v_{vv}\mathbf{x}_v + h_{vv}N, \end{array}\right\} \tag{1}$$

$$\left.\begin{array}{rcl} N_u & = & a_{11}\mathbf{x}_u + a_{21}\mathbf{x}_v, \\ N_v & = & a_{12}\mathbf{x}_u + a_{22}\mathbf{x}_v. \end{array}\right\} \tag{2}$$

donde $\Gamma^k_{ij} \in \mathbb{R}$.

Definición

Los coeficientes Γ_{ij}^{k} se llaman los ***símbolos de Christoffel*** *asociados a* $\mathbf{x}$.

En lo que sigue, escribimos $u = 1$, $v = 2$ y utilizamos la notación compacta de Einstein $a_i^k b_{kj} = \sum_k a_{ik} b_{kj}$.

Entonces, el sistema de ecuaciones (1) se escribe como

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_{ij} &= \Gamma_{ij}^{k}\mathbf{x}_k + h_{ij}N, \\ N_i &= {a^k}_i \mathbf{x}_k, \end{aligned}$$

para $i, j, k \in \{1, 2\}$

Por otro lado, $\mathbf{x}_{ij} = \mathbf{x}_{ji} \;\Rightarrow \Gamma^k_{ij} = \Gamma^k_{ji}$, de modo que los símbolos de Christoffel son simétricos en re lación a los índices inferiores.

Recordemos que la primera forma fundamental se representa por $G = (g_{ij})$, con $g_{ij} = \langle \mathbf{x}_i, \mathbf{x}_j \rangle$ Denotamos la inversa por $G^{-1} = (g^{ij})$. Tenemos

$$g_{ik} g^{kj} = \delta_i^j \;\; \text{(delta de Kronecker).}$$

De ahí que

$$\langle \mathbf{x}_{ij}, \mathbf{x}_\ell \rangle = \langle \Gamma^k_{ij} \mathbf{x}_k + h_{ij} N, \mathbf{x}_\ell \rangle = \Gamma^k_{ij} \langle \mathbf{x}_k, \mathbf{x}_\ell \rangle + h_{ij} \langle N, \mathbf{x}_\ell \rangle = \Gamma^k_{ij} g_{k\ell} = g_{k\ell} \Gamma^k_{ij}.$$

$$\Rightarrow g^{\ell p} \langle \mathbf{x}_{ij}, \mathbf{x}_\ell \rangle = g^{\ell p} g_{k\ell} \Gamma^k_{ij} = \delta^p_k \Gamma^k_{ij} = \Gamma^p_{ij}.$$

UNIVERSIDAD DEL VALLE DE GUATEMALA

Portanto

$$\Gamma_{ij}^{k} = g^{\ell k}\langle \mathbf{x}_{ij}, \mathbf{x}_{\ell}\rangle. \tag{3}$$

Además,

$$\begin{aligned}
\partial_k g_{ij} &= \partial_k\langle \mathbf{x}_i, \mathbf{x}_j\rangle = \langle \mathbf{x}_{ik}, \mathbf{x}_j\rangle + \langle \mathbf{x}_i, \mathbf{x}_{jk}\rangle, \\
-\partial_j g_{ik} &= -\partial_j\langle \mathbf{x}_i, \mathbf{x}_k\rangle = -\langle \mathbf{x}_{ij}, \mathbf{x}_k\rangle - \langle \mathbf{x}_i, \mathbf{x}_{jk}\rangle, \\
\partial_i g_{jk} &= \partial_i\langle \mathbf{x}_j, \mathbf{x}_k\rangle = \langle \mathbf{x}_{ij}, \mathbf{x}_k\rangle + \langle \mathbf{x}_j, \mathbf{x}_{ik}\rangle.
\end{aligned}$$

Sumando estas tres ecuaciones, obtenemos

$$\partial_k g_{ij} - \partial_j g_{ik} + \partial_i g_{jk} = \langle \mathbf{x}_{ik}, \mathbf{x}_j\rangle + \langle \mathbf{x}_j, \mathbf{x}_{ik}\rangle = 2\langle \mathbf{x}_{ik}, \mathbf{x}_j\rangle. \tag{4}$$

Sustituyendo (4) en (3), obtenemos

$$\boxed{\Gamma_{ij}^{k} = \frac{1}{2} g^{\ell k}\big(\partial_i g_{j\ell} + \partial_j g_{i\ell} - \partial_\ell g_{ij}\big).}$$

Hemos probado entonces que

Propiedad

Los símbolos de Christoffel Γ_{ij}^k *son cantidades intrínsecas.* $\square$

Corolario

Los símbolos de Christoffel Γ_{ij}^k *son invariantes por isometrías.* $\square$

Ecuaciones de compatibilidad

Dadas funciones $E, F, G, e, f, g : U \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, ¿existe alguna parametrización $\mathbf{x}$ de una superficie tal que E, F, G, e, f, g sean los coeficientes de la primera y segunda forma fundamental asociada a $\mathbf{x}$?

Obs! Requerimos algunas condiciones necesarias

- $E > 0$, $G > 0$,
- $EG - F^2 > 0$.

Podemos derivar otras condiciones de compatibilidad. Recordemos que

$$
\begin{aligned}
\mathbf{x}_{ij} &= \Gamma_{ij}^k \mathbf{x}_k + h_{ij} N, \\
N_i &= a^k{}_i \mathbf{x}_k, \\
\Gamma_{ij}^k &= \frac{1}{2} g^{\ell k} \big(\partial_i g_{j\ell} + \partial_j g_{i\ell} - \partial_\ell g_{ij} \big).
\end{aligned}
$$

Ecuaciones de compatibilidad

Derivando parcialmente la primer ecuación

$$\left(\Gamma_{ij}^{k}\mathbf{x}_k + h_{ij}N\right)_m = (\mathbf{x}_{ij})_m = \mathbf{x}_{ijm} = \mathbf{x}_{imj} = (\mathbf{x}_{im})_j = \left(\Gamma_{im}^{k}\mathbf{x}_k + h_{im}N\right)_j.$$

Denotamos por $\Gamma_{ij,m}^{k} = \partial_m \Gamma_{ij}^{k}$. Entonces

$$\Gamma_{ij,m}^{k}\mathbf{x}_k + \Gamma_{ij}^{k}\mathbf{x}_{km} + h_{ij,m}N + h_{ij}N_m = \Gamma_{im,j}^{k}\mathbf{x}_k + \Gamma_{im}^{k}\mathbf{x}_{kj} + h_{im,j}N + h_{im}N_j.$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \qquad & \Gamma_{ij,m}^{k}\mathbf{x}_k + \Gamma_{ij}^{k}\left(\Gamma_{km}^{\ell}\mathbf{x}_\ell + h_{km}N\right) + h_{ij,m}N + h_{ij}{a^\ell}_m\mathbf{x}_\ell \\ = \quad & \Gamma_{im,j}^{k}\mathbf{x}_k + \Gamma_{im}^{k}\left(\Gamma_{kj}^{\ell}\mathbf{x}_\ell + h_{kj}N\right) + h_{im,j}N + h_{im}{a^\ell}_j\mathbf{x}_\ell. \end{aligned}$$

Reescribiendo $\Gamma_{ij,m}^{k} = \Gamma_{ij,m}^{\ell}$, $\Gamma_{im,j}^{k} = \Gamma_{im,j}^{\ell}$

$$\begin{aligned} & \left(\Gamma_{ij,m}^{\ell} + \Gamma_{ij}^{k}\Gamma_{km}^{\ell} + h_{km}{a^\ell}_m\right)\mathbf{x}_\ell + \left(h_{ij,m} + h_{km}\Gamma_{ij}^{k}\right)N \\ = \quad & \left(\Gamma_{im,j}^{\ell} + \Gamma_{im}^{k}\Gamma_{kj}^{\ell} + h_{kj}{a^\ell}_j\right)\mathbf{x}_\ell + \left(h_{im,j} + h_{kj}\Gamma_{im}^{k}\right)N. \end{aligned}$$

Ecuaciones de compatibilidad

Como $\mathbf{x}_\ell$ y N son independientes, podemos deducir las primeras ecuaciones de compatibilidad.

1. $\Gamma^\ell_{ij,m} + \Gamma^k_{ij}\Gamma^\ell_{km} + h_{km}{a^\ell}_m = \Gamma^\ell_{im,j} + \Gamma^k_{im}\Gamma^\ell_{kj} + h_{kj}{a^\ell}_j$,
2. $h_{ij,m}N + h_{km}\Gamma^k_{ij} = h_{im,j}N + h_{kj}\Gamma^k_{im}$.

Hacemos un tratamiento similar con la segunda ecuación

$$({a^k}_i\mathbf{x}_k)_j = (N_i)_j = N_{ij} = N_{ji} = (N_j)_i = ({a^k}_j\mathbf{x}_k)_i$$

$\Rightarrow \; {a^k}_{i,j}\mathbf{x}_k + {a^k}_i\mathbf{x}_{kj} = N_{ij} = N_{ji} = {a^k}_{j,i}\mathbf{x}_k + {a^k}_j\mathbf{x}_{ki}$
o equivalentemente

$$ {a^k}_{i,j}\mathbf{x}_k + {a^k}_i\big(\Gamma^\ell_{kj}\mathbf{x}_\ell + h_{kj}N\big) = {a^k}_{j,i}\mathbf{x}_k + {a^k}_j\big(\Gamma^\ell_{ki}\mathbf{x}_\ell + h_{ki}N\big). $$

Ecuaciones de compatibilidad

Reescribiendo $\Gamma^k_{ij,m} = \Gamma^\ell_{ij,m}$, $\Gamma^k_{im,j} = \Gamma^\ell_{im,j}$

$$(a^\ell{}_{i,j} + a^k{}_i\Gamma^\ell_{kj})\mathbf{x}_\ell + a^k{}_i h_{kj} N = (a^k{}_{j,i} + a^k{}_j\Gamma^\ell_{ki})\mathbf{x}_\ell + a^k{}_j h_{ki} N.$$

De nuevo, como $\mathbf{x}_\ell$ y N son independientes, obtenemos otras dos ecuaciones de compatibilidad.

3. $a^\ell{}_{i,j} + a^k{}_i\Gamma^\ell_{kj} = a^k{}_{j,i} + a^k{}_j\Gamma^\ell_{ki}$,
4. $a^k{}_i h_{kj} = a^k{}_j h_{ki}$.

Por otro lado, de la condición de compatibilidad (1.) tenemos

$$h_{ij}a^\ell{}_m - h_{im}a^\ell{}_j = \Gamma^\ell_{im,j} - \Gamma^\ell_{ij,m} + \Gamma^k_{im}\Gamma^\ell_{kj} - \Gamma^k_{ij}\Gamma^\ell_{km}. \tag{5}$$

Teorema (Teorema *Egregium* de Gauss)

La curvatura gaussiana K es una cantidad intrínseca.

Prueba:

$$\begin{aligned} -EK &= -E\frac{eg-f^2}{EG-F^2} = e\frac{fF-gE}{EG-F^2} - f\frac{eF-fE}{EG-F^2} \\ &= h_{11}a_{22} - h_{12}a_{21} \\ &= \Gamma^2_{12,1} - \Gamma^2_{11,2} + \Gamma^k_{12}\Gamma^2_{k1} - \Gamma^k_{11}\Gamma^2_{k2}, \end{aligned}$$

donde la última igualdad es la eq. (5) con $i = j = 1$, $\ell = m = 2$.

De ahí que

$$K = -\frac{1}{g_{11}}\left(\Gamma^2_{12,1} - \Gamma^2_{11,2} + \Gamma^k_{12}\Gamma^2_{k1} - \Gamma^k_{11}\Gamma^2_{k2}\right). \ \square$$