Superficies Mínimas II

Alan Reyes-Figueroa

Geometría Diferencial (Aula 28) 29.abril.2025

Definición

Sea $S \subset \mathbb{R}^3$ superficie regular. Decimos que una parametrización $\mathbf{x} : U \subseteq \mathbb{R}^2 \to V \cap S$ es ***isotérmica*** *si $E = G$ y $F = 0$ ($|\mathbf{x}_u| = |\mathbf{x}_v|$, $\langle \mathbf{x}_u, \mathbf{x}_v \rangle = 0$). En ese caso, los parámetros o coordenadas (u,v) se llaman isotérmicos.*

Parametrización isotérmica de un elipsoide

Definición

*Sea $S \subset \mathbb{R}^3$ superficie regular. Una parametrización $\mathbf{x} : U \subseteq \mathbb{R}^2 \to S$ es **conforme**, si la primera forma fundamental es un múltipplo de la identiad*

$$I_{\mathbf{p}} = (g_{ij}) = \lambda(u,v)\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \forall (u,v) \in U,$$

para alguna función $\lambda : U \to \mathbb{R}$.

*Dos superficies $S, \widetilde{S}$, con parametrizaciones $\mathbf{x} : U \to S$, $\widetilde{\mathbf{x}} : U \to \widetilde{S}$ son **conformemente equivalentes** si*

$$\widetilde{I}_{\mathbf{p}} = (\widetilde{g}_{ij}) = \lambda(u,v)\,(g_{ij}) = \lambda(u,v) I_{\mathbf{p}}, \quad for (u,v) \in U,$$

para alguna función positiva $\lambda : U \to \mathbb{R}$. Equivalentemente, S y S' son conformemente equivalentes si existe un cambio de parametrización $\varphi = \widetilde{\mathbf{x}}^{-1} \circ \mathbf{x} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ tal que

$$\Big\langle \frac{\partial(\widetilde{\mathbf{x}} \circ \varphi)}{\partial u_i}, \frac{\partial(\widetilde{\mathbf{x}} \circ \varphi)}{\partial u_j} \Big\rangle = \lambda(u,v) \Big\langle \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial u_i}, \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial u_j} \Big\rangle, \quad \forall i,j.$$

Superficies isotérmicas

Proposición

Las siguientes son equivalentes:
(1.) $\mathbf{x} : U \subseteq \mathbb{R}^2 \to V \cap S$ *es isotérmica.*
(2.) $\mathbf{x}$ *es una aplicación conforme (preserva ángulos entre vectores* $T_{\mathbf{p}}S$*).*
(3.) para todo $\mathbf{q} \in U$*, existe* $\lambda(\mathbf{q}) > 0$ *tal que*

$$\langle D\mathbf{x}(\mathbf{q}) \cdot \mathbf{w}_1, D\mathbf{x}(\mathbf{q}) \cdot \mathbf{w}_2 \rangle = \lambda(\mathbf{q})^2 \langle \mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2 \rangle.$$

Prueba: $(1 \Rightarrow 3)$. Sea $\lambda(\mathbf{q}) = E = G$. Por definición de la primera forma fundamental, tenemos $\langle D\mathbf{x}(\mathbf{q}) \cdot \mathbf{e}_1, D\mathbf{x}(\mathbf{q}) \cdot \mathbf{e}_1 \rangle = E = \lambda^2 = \langle \mathbf{x}_u, \mathbf{x}_u \rangle$.
Similarmente, $\langle D\mathbf{x}(\mathbf{q}) \cdot \mathbf{e}_2, D\mathbf{x}(\mathbf{q}) \cdot \mathbf{e}_2 \rangle = G = \lambda^2 = \langle \mathbf{x}_v, \mathbf{x}_v \rangle$, y
$\langle D\mathbf{x}(\mathbf{q}) \cdot \mathbf{e}_1, D\mathbf{x}(\mathbf{q}) \cdot \mathbf{e}_2 \rangle = F = 0 = \lambda \langle \mathbf{x}_u, \mathbf{x}_v \rangle$. Así, la propiedad se verifica para la base canónica de $\mathbb{R}^2$, y por linealidad, se extiende a todo vector.

$(3 \Rightarrow 2)$.

$$\begin{aligned}\cos\angle(D\mathbf{x}(\mathbf{q})\cdot\mathbf{w}_1, D\mathbf{x}(\mathbf{q})\cdot\mathbf{w}_2) &= \frac{\langle D\mathbf{x}(\mathbf{q})\cdot\mathbf{w}_1, D\mathbf{x}(\mathbf{q})\cdot\mathbf{w}_2\rangle}{|D\mathbf{x}(\mathbf{q})\cdot\mathbf{w}_1|\cdot|D\mathbf{x}(\mathbf{q})\cdot\mathbf{w}_2|} = \frac{\lambda^2(\mathbf{q})\langle\mathbf{w}_1,\mathbf{w}_2\rangle}{\lambda^2(\mathbf{q})|\mathbf{w}_1|\cdot|\mathbf{w}_2|}\\ &= \frac{\langle\mathbf{w}_1,\mathbf{w}_2\rangle}{|\mathbf{w}_1|\cdot|\mathbf{w}_2|} = \cos\angle(\mathbf{w}_1,\mathbf{w}_2).\end{aligned}$$

$\Rightarrow$ $\mathbf{x}$ es conforme.

$(2 \Rightarrow 1)$.

$$\begin{aligned}E &= \langle\mathbf{x}_u,\mathbf{x}_u\rangle = \langle D\mathbf{x}(\mathbf{q})\cdot\mathbf{e}_1, D\mathbf{x}(\mathbf{q})\cdot\mathbf{e}_1\rangle = \lambda(\mathbf{q})\langle\mathbf{e}_1,\mathbf{e}_1\rangle = \lambda(\mathbf{q}) = \lambda(\mathbf{q})\langle\mathbf{e}_2,\mathbf{e}_2\rangle\\ &= \langle D\mathbf{x}(\mathbf{q})\cdot\mathbf{e}_2, D\mathbf{x}(\mathbf{q})\cdot\mathbf{e}_2\rangle = \langle\mathbf{x}_v,\mathbf{x}_v\rangle = G,\\ F &= \langle\mathbf{x}_u,\mathbf{x}_v\rangle = \langle D\mathbf{x}(\mathbf{q})\cdot\mathbf{e}_1, D\mathbf{x}(\mathbf{q})\cdot\mathbf{e}_2\rangle = \lambda(\mathbf{q})\langle\mathbf{e}_1,\mathbf{e}_2\rangle = 0. \;\square\end{aligned}$$

Superficies isotérmicas

Teorema

Sea $S \subset \mathbb{R}^3$ superficie regular. Dado $\mathbf{p} \in V \cap S$, siempre existe una parametrización isotérmica $\mathbf{x} : U \subseteq \mathbb{R}^2 \to V \cap S$.

(Idea: aplicar ortonormalización de Gram-Schmidt a la base $\{\mathbf{x}_u, \mathbf{x}_v\}$.)

Superficies isotérmicas

Si $\mathbf{x} : U \subseteq \mathbb{R}^2 \to V \cap S$ es una parametrización isotérmica, entonces $\langle \mathbf{x}_u, \mathbf{x}_u \rangle = \langle \mathbf{x}_v, \mathbf{x}_v \rangle$ y $\langle \mathbf{x}_u, \mathbf{x}_v \rangle = 0$.

Derivando obtenemos

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{x}_{uu}, \mathbf{x}_u \rangle &= \langle \mathbf{x}_{uv}, \mathbf{x}_v \rangle, & \qquad \langle \mathbf{x}_{uu}, \mathbf{x}_v \rangle + \langle \mathbf{x}_u, \mathbf{x}_{uv} \rangle &= 0, \\ \langle \mathbf{x}_{vv}, \mathbf{x}_v \rangle &= \langle \mathbf{x}_{uv}, \mathbf{x}_u \rangle, & \qquad \langle \mathbf{x}_{uv}, \mathbf{x}_v \rangle + \langle \mathbf{x}_u, \mathbf{x}_{vv} \rangle &= 0. \end{aligned}$$

Luego,

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{x}_{uu} + \mathbf{x}_{vv}, \mathbf{x}_u \rangle &= \langle \mathbf{x}_{uu}, \mathbf{x}_u \rangle + \langle \mathbf{x}_{vv}, \mathbf{x}_u \rangle = \langle \mathbf{x}_{uv}, \mathbf{x}_v \rangle - \langle \mathbf{x}_{uv}, \mathbf{x}_v \rangle = 0, \\ \langle \mathbf{x}_{uu} + \mathbf{x}_{vv}, \mathbf{x}_v \rangle &= \langle \mathbf{x}_{uu}, \mathbf{x}_v \rangle + \langle \mathbf{x}_{vv}, \mathbf{x}_v \rangle = -\langle \mathbf{x}_{uv}, \mathbf{x}_u \rangle + \langle \mathbf{x}_{uv}, \mathbf{x}_u \rangle = 0. \end{aligned}$$

Obtenemos entonces la siguiente propiedad.

Propiedad

Si $\mathbf{x} : U \subseteq \mathbb{R}^2 \to S$ *es una parametrización isotérmica, entonces* $\Delta\mathbf{x}$ *es paralelo al vector normal* N.

Prueba:
De las ecuaciones anteriores, $\langle \Delta\mathbf{x}, \mathbf{x}_u \rangle = \langle \Delta\mathbf{x}, \mathbf{x}_v \rangle = 0$. Esto muestra que $\Delta\mathbf{x} \in T_{\mathbf{p}}S^{\perp} \;\Rightarrow\; \Delta\mathbf{x}$ es paralelo a N, $\forall \mathbf{p} \in S$. $\square$

Obs.
De la propiedad anterior, existe una función diferenciable $\beta : S \to \mathbb{R}$ tal que $\Delta\mathbf{x} = \beta N$. En particular, podemos escribir

$$\beta = \langle \beta N, N \rangle = \langle \Delta\mathbf{x}, N \rangle.$$

Luego,

$$\begin{aligned} \beta &= \langle \Delta \mathbf{x}, N \rangle = \langle \mathbf{x}_{uu} + \mathbf{x}_{vv}, N \rangle = \langle \mathbf{x}_{uu}, N \rangle + \langle \mathbf{x}_{vv}, N \rangle = e + g \\ &= I_{\mathbf{p}}(\mathbf{x}_u) + I_{\mathbf{p}}(\mathbf{x}_v). \end{aligned}$$

De ahí que

$$\frac{1}{\lambda^2}\beta = I_{\mathbf{p}}\Big(\frac{\mathbf{x}_u}{\lambda}\Big) + I_{\mathbf{p}}\Big(\frac{\mathbf{x}_v}{\lambda}\Big) = \frac{eG - 2fF + gE}{EG - F^2} = 2H.$$

Portanto,

$$\boxed{\beta = 2\lambda^2 H, \quad \Delta \mathbf{x} = 2\lambda^2 HN.}$$

Propiedad

Si $\mathbf{x}$ es isotérmica, entonces $\Delta \mathbf{x} = 2\lambda^2 HN$.

Recordemos que una función f es **armónica** si $\Delta f = 0$.

Corolario

$S \subset \mathbb{R}^3$ es superficie mínima $\Leftrightarrow$ las funciones coordenadas $x(u,v)$, $y(u,v)$, $z(u,v)$ son funciones armónicas, cuando se consideran en parámetros isotérmicos (u,v).

Prueba:

$$\begin{aligned} S \text{ es mínima} \quad &\Leftrightarrow \quad H \equiv 0 \;\Leftrightarrow\; \Delta\mathbf{x} = 2\lambda^2 HN = 0 \;\Leftrightarrow\; \mathbf{x} = (x,y,z) \text{ es armónica} \\ &\Leftrightarrow \quad x, y, z \text{ son armónicas.} \;\square \end{aligned}$$

- Conexiones con funciones holomorfas (próxima aula).

Conexión con funciones holomorfas

Recordemos que si $f(u,v)$ es una función armónica (de clase C^2), entonces la función compleja

$$F(u,v) = \frac{\partial f}{\partial u} - i\frac{\partial f}{\partial v}$$

es holomorfa.

Prueba:
Basta verificar las ecuaciones de Cauchy-Riemann para F.

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial u}\Big(\frac{\partial f}{\partial u}\Big) &= \frac{\partial^2 f}{\partial u^2} = -\frac{\partial^2 f}{\partial v^2} = \frac{\partial}{\partial v}\Big(-\frac{\partial f}{\partial v}\Big), \\ \frac{\partial}{\partial v}\Big(\frac{\partial f}{\partial u}\Big) &= \frac{\partial^2 f}{\partial v \partial u} = \frac{\partial^2 f}{\partial u \partial v} = -\frac{\partial}{\partial u}\Big(-\frac{\partial f}{\partial v}\Big). \end{aligned}$$

Suponga ahora que $\mathbf{x}(u,v)$ es una parametrización en parámetros isotérmicos de la superficie mínima S. Entonces, ya vimos que $\mathbf{x} = (x,y,z)$ es una función armónica.

En particular, las tres funciones coordenadas x,y,z son armónicas. De la observación anterior, tenemos tres funciones holomorfas

$$F_1(u,v) = \frac{\partial x}{\partial u} - i\frac{\partial x}{\partial v}, \quad F_2(u,v) = \frac{\partial y}{\partial u} - i\frac{\partial y}{\partial v}, \quad F_3(u,v) = \frac{\partial z}{\partial u} - i\frac{\partial z}{\partial v}.$$

Propiedad

Sea $S \subset \mathbb{R}^3$ superficie regular, con parámetros (u, v), y $\mathbf{x} : U \subseteq \mathbb{R}^2 \to S$ su parametrización. Entonces,

- *(a) $\mathbf{x}$ es isotérmica $\Leftrightarrow$ $F_1^2 + F_2^2 + F_3^2 = 0$.*
- *(b) Si $\mathbf{x}$ es isotérmica, entonces S es mínima $\Leftrightarrow$ F_1, F_2, F_3 son holomorfas.*

Prueba:

(a) $$F_1 = \frac{\partial x}{\partial u} - i\frac{\partial x}{\partial v}, \quad F_2 = \frac{\partial y}{\partial u} - i\frac{\partial y}{\partial v}, \quad F_3 = \frac{\partial z}{\partial u} - i\frac{\partial z}{\partial v}$$. Luego,

$$F_1^2 = \Big(\frac{\partial x}{\partial u}\Big)^2 - 2i\frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial x}{\partial v} - \Big(\frac{\partial x}{\partial v}\Big)^2, \quad F_2^2 = \Big(\frac{\partial y}{\partial u}\Big)^2 - 2i\frac{\partial y}{\partial u}\frac{\partial y}{\partial v} - \Big(\frac{\partial y}{\partial v}\Big)^2, \quad F_3^2 = \Big(\frac{\partial z}{\partial u}\Big)^2 - 2i\frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial z}{\partial v} - \Big(\frac{\partial z}{\partial v}\Big)^2.$$

Así

$$\begin{aligned} F_1^2 + F_2^2 + F_3^2 &= \sum_j \left(\frac{\partial x_j}{\partial u}\right)^2 - 2i \sum_j \frac{\partial x_j}{\partial u}\frac{\partial x_j}{\partial v} - \sum_j \left(\frac{\partial x_j}{\partial v}\right)^2 \\ &= \langle \mathbf{x}_u, \mathbf{x}_u \rangle - 2i \langle \mathbf{x}_u, \mathbf{x}_v \rangle - \langle \mathbf{x}_v, \mathbf{x}_v \rangle = (E - G) - 2iF. \end{aligned}$$

De ahí que $\mathbf{x}$ isotérmica $\Leftrightarrow E = G, F = 0, \Leftrightarrow F_1^2 + F_2^2 + F_3^2 = 0$.

(b) $(\Rightarrow)$ Si S es mínima, entonces $\mathbf{x}$ es armónica $\Rightarrow \Delta\mathbf{x} = (\Delta x, \Delta y, \Delta z) = \mathbf{0}$. Luego, $\Delta x = \Delta y = \Delta z = 0$. De la propiedad probada anteriormente, las funciones F_1, F_2 y F_3 son holomorfas.

$(\Leftarrow)$ Si F_1, F_2, F_3 son holomorfas, las ecuaciones de Cauchy-Riemann muestran que $\Delta x = \Delta y = \Delta z = 0$, de modo que $\mathbf{x}$ es armónica. $\square$

Superficies mínimas

La propiedad anterior produce un algoritmo para construir parametrizaciones de superficies mínimas:

- Tomar $F_1, F_2 : U \subseteq \mathbb{R}^2 = \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ funciones holomorfas.
- Definir $F_3 : U \to \mathbb{C}$ por $F_3^2 = -(F_1^2 + F_2^2)$, la cual también es holomorfa.
- Recuperar las funciones coordenadas $x(u, v), y(u, v), z(u, v)$ mediante el método de ecuaciones exactas

$$x_j = \int_{u_0}^{u} \operatorname{Re} F_j \, \partial u = \operatorname{Re} \int_{\mathbf{p}_0}^{\mathbf{p}} F_j \, dz, \quad \text{para } j = 1, 2, 3.$$

Luego, la parametrización $\mathbf{x}(u, v) = (x(u, v), y(u, v), z(u, v))$ será armónica, y la superficie definida por $S = \mathbf{x}(U)$ es mínima.

Complexificación

Definición

*Sea $S \subset \mathbb{R}^3$ superficie regular y $\mathbf{x} : U \subseteq \mathbb{R}^2 \to S$ una parametrización con componentes $x(u,v), y(u,v), z(u,v)$. El mapa $F : U \to \mathbb{C}^3$ dado por $F(u,v) = (F_1(u,v), F_2(u,v), F_3(u,v))$, con $F_j = \frac{\partial x_j}{\partial u} - i\frac{\partial x_j}{\partial v}$, se le llama la **complexificación** de S.*

Corolario

Si $F : U \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{C}^3$ es la complexixficación de S, entonces

1. *$\mathbf{x}$ es isotérmica $\iff F_1^2 + F_2^2 + F_2^3 = 0$.*
2. *Si S es isotérmica, S es mínima $\iff F_1, F_2, F_3$ son holomorfas.*
3. *Recíprocamente, si F_1, F_2, F_3 son holomorfas con $F_1^2 + F_2^2 + F_3^2 = 0$, entonces F es regular (inmersión) $F_1\overline{F}_1 + F_2\overline{F}_2 + F_3\overline{F}_3 \neq 0$.*

Prueba:
Ya mostramos (1) y (2).
(3.) Tenemos

$$F_1\overline{F}_1 + F_2\overline{F}_2 + F_3\overline{F}_3 = \langle \mathbf{x}_u, \mathbf{x}_u \rangle + \langle \mathbf{x}_v, \mathbf{x}_v \rangle = E + G \geq 0,$$

con igualdad si y sólo si $\mathbf{x}_u = \mathbf{x}_v = \mathbf{0}$.

De la prueba de (1)

$$\begin{aligned} F_1^2 + F_2^2 + F_3^2 &= \sum_j \left(\frac{\partial x_j}{\partial u} \right)^2 - 2i \sum_j \frac{\partial x_j}{\partial u} \frac{\partial x_j}{\partial v} - \sum_j \left(\frac{\partial x_j}{\partial v} \right)^2 \\ &= \langle \mathbf{x}_u, \mathbf{x}_u \rangle - 2i \langle \mathbf{x}_u, \mathbf{x}_v \rangle - \langle \mathbf{x}_v, \mathbf{x}_v \rangle = (E - G) - 2iF = 0. \end{aligned}$$

$\Rightarrow$ ambos vectores $\mathbf{x}_u, \mathbf{x}_v$ son nulos, o ambos son distintos de cero y l.i. Esto implica (3).

Complexificación

Obs: Los ceros de F corresponden, por (3), a los puntos en donde $\mathbf{x}$ no es regular. Típicamente, en la teoría de funciones complejas no tiene sentido excluir ceros, mientras que en geometría diferencial generalmente se asumen elementos de superficies regulares.

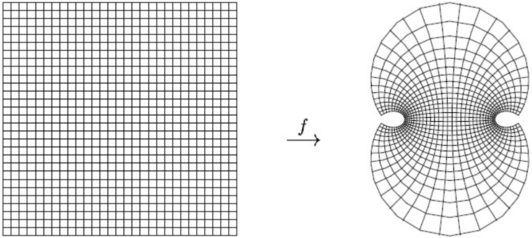
Corolario

Sea $U \subseteq \mathbb{C}$ un dominio simplemente conexo, y sean $F_j : U \to \mathbb{C}$ holomorfas, $j = 1, 2, 3$, con $F_1^2 + F_2^2 + F_3^2 = 0$ y $F_1\overline{F}_1 + F_2\overline{F}_2 + F_3\overline{F}_3 \neq 0$.
Entonces el mapa $\mathbf{x} : U \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$, con componentes $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3)$ definidas por

$$x_j = \mathrm{Re} \int_{z_0}^{z} F_j(z)\, dz, \quad \textit{para } j = 1, 2, 3,$$

parametriza un elemento de superficie mínima regular. $\square$

Cauchy-Riemann tiene una interpretación geométrica. Si $F : U \subseteq \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $F = \frac{\partial f}{\partial u} + i\frac{\partial f}{\partial v}$ es holomorfa, las ecuaciones de Cauchy-Riemann para F implican que en todo punto, la matrix jacobiana (real) de F es la composición de una rotación y una multiplicación escalar (donde el ángulo de rotación y el múltiplo escalar varían punto a punto).



Grid coordenado y su imagen conforme bajo la función holomorfa $f(z) = \frac{z}{z^2+1}$

Representación de Weierstrass

Resumiendo: Cada superficie mínima S, localmente permite una parametrización isotérmica, siempre que no hayan puntos singulares. En esta parametrización conforme, la superficie es analítica y ocurre como la parte real de una función analítica compleja $F : U \subseteq \mathbb{C} \to \mathbb{C}^3$.

Para una de estas F dada, con las restricciones $F_1^2 + F_2^2 + F_3^2 = 0$ y $F_1\overline{F}_1 + F_2\overline{F}_2 + F_3\overline{F}_3 \neq 0$, se obtiene una superficie mínims S.

Una pregunta natural en este punto es si podemos prescribir libremente la función F sin el uso de restricciones.
Respuesta: Sí, la *representación de Weierstrass*. Esto permite mayor libertad de elección de dos funciones componentes de la F.

Lema

Dadas tres funciones holomorfas arbitrarias $F_1, F_2, F_3 : U \subseteq \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, *con* $F_1^2 + F_2^2 + F_3^2 = 0$, *(donde asumimos que ninguna de las* F_j *se anula idénticamente), es posible asociar una función holomorfa* $\Phi : U \to \mathbb{C}$ *y una función meromorfa* $\Psi : U \to \overline{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$, *con las siguientes propiedades:*
$\Phi\Psi^2$ *es holomorfa y*

$$F_1 = \frac{\Phi}{2}(1 - \Psi^2), \quad F_2 = \frac{i\Phi}{2}(1 + \Psi^2), \quad F_3 = \Phi\Psi.$$

Recíprocamente, cada par de funciones (Φ, Ψ), $\Phi : U \to \mathbb{C}$ *holomorfa,* $\Psi : U \to \overline{\mathbb{C}}$ *meromorfa, induce tres funciones holomorfas* F_1, F_2, F_3, *que satisfacen* $F_1^2 + F_2^2 + F_3^2 = 0$.

Prueba:
Sea $F : U \subseteq \mathbb{C} \to \mathbb{C}^3$, dada por $F = (F_1, F_2, F_3)$, con $F_j : U \to \mathbb{C}$ holomorfa, y $F_1^2 + F_2^2 + F_3^2 = 0$.
Definamos

$$\Phi = F_1 - iF_2, \quad \Psi = \frac{F_3}{F_1 - iF_2}.$$

Esto está bien definido excepto en el caso de que $F_1 = iF_2$, lo que implica que además $F_3 \equiv 0$, caso que ha sido excluido por hipótesis.

Así,

$$\Phi\Psi^2 = \frac{F_3^2}{F_1 - iF_2} = -\frac{F_1^2 + F_2^2}{F_1 - iF_2} = -\frac{(F_1 + iF_2)(F_1 - iF_2)}{F_1 + iF_2} = -(F_1 + iF_2),$$

que es una función holomorfa.

Representación de Weierstrass

Las identidades

$$\begin{aligned}
\Phi(1-\Psi^2) &= \Phi - \Phi\Psi^2 = (F_1 - iF_2) + (F_1 + iF_2) = 2F_1,\\
\Phi(1+\Psi^2) &= \Phi + \Phi\Psi^2 = (F_1 - iF_2) - (F_1 + iF_2) = -2iF_2,\\
\Phi\Psi &= (F_1 - iF_2)\,\frac{F_3}{F_1 - iF_2} = F_3,
\end{aligned}$$

implican la ecuaciones

$$F_1 = \frac{\Phi}{2}(1-\Psi^2), \quad F_2 = \frac{i\Phi}{2}(1+\Psi^2), \quad F_3 = \Phi\Psi.$$

Recíprocamente, dadas $\Phi : U \to \mathbb{C}$ holomorfa y $\Psi : U \to \overline{\mathbb{C}}$ meromorfa, entonces las funciones F_1, F_2, F_3 satisfacen

Representación de Weierstrass

$$\begin{aligned}
F_1^2 + F_2^2 + F_3^2 &= \left(\frac{\Phi}{2}(1-\Psi^2)\right)^2 + \left(\frac{i\Phi}{2}(1+\Psi^2)\right)^2 + \left(\Phi\Psi\right)^2 \\
&= \frac{1}{4}\Phi^2(1-\Psi^2)^2 - \frac{1}{4}\Phi^2(1+\Psi^2)^2 + \Phi^2\Psi^2 \\
&= \frac{1}{4}\left(\Phi^2 - 2\Phi^2\Psi^2 + \Phi^2\Psi^4\right) - \frac{1}{4}\left(\Phi^2 + 2\Phi^2\Psi^2 + \Phi^2\Psi^4\right) + \Phi^2\Psi^2 \\
&= \frac{1}{4}\left(-4\Phi^2\Psi^2\right) + \Phi^2\Psi^2 = 0.
\end{aligned}$$

Además, F_1, F_2 son holomorfas, ya que $\Phi\Psi^2$ lo es. En cualquier caso $\Phi\Psi$ también es holomorfa, por lo tanto, F_3 es holomorfa. $\square$

Representación de Weierstrass

Observaciones:

- Además, la relación $F_1^2 + F_2^2 + F_3^2 = 0$ es válida en un punto sólo si $\Phi = \Phi\Psi = \Phi\Psi^2 = 0$ allí.

- El caso excluido $F_1 = iF_2$ y $F_3 \equiv 0$ corresponde geométricamente a un plano que es paralelo al plano (u, v).
  La representación de Weierstrass a continuación va a excluir este caso.

- Aparte de esto, las dos Φ y Ψ pueden definirse esencialmente de forma arbitraria, induciendo (al menos localmente) una superficie mínima correspondiente, dada por una fórmula explícita.

Corolario (Representación de Weierstrass)

Toda superficie mínima, parametrizada en párametros isotérmicos $\mathbf{x} : U \subseteq \mathbb{R}^2 \to S$*, que no sea un plano, puede ser localmente representada de la siguiente manera:*

$$\begin{aligned} x(u,v) &= \operatorname{Re} \int_{z_0}^{z} \frac{1}{2}\Phi(\zeta)\left(1 - \Psi(\zeta)^2\right) d\zeta, \\ y(u,v) &= \operatorname{Re} \int_{z_0}^{z} \frac{i}{2}\Phi(\zeta)\left(1 + \Psi(\zeta)^2\right) d\zeta, \\ z(u,v) &= \operatorname{Re} \int_{z_0}^{z} \frac{1}{2}\Phi(\zeta)\Psi(\zeta)\, d\zeta, \end{aligned}$$

donde $\Phi : U \to \mathbb{C}$ *es holomorfa y* $\Psi : U \to \overline{\mathbb{C}}$ *es meromorfa, son tales que*

Representación de Weierstrass

$\Phi\Psi^2$ es holomorfa (exactamente las mismas condiciones que en lema). El dominio de la parametrización debe elegirse de tal manera que las integrales que ocurren son independientes del camino de integración (U simplemente conexo, para que se cumpla el Teorema de Cahuchy).

Recíprocamente, cada par (Φ, Ψ) con $\Phi\Psi^2$ holomorfa, define un elemento de superficie mínima con parametrización isotérmica $\mathbf{x}$. Tal parametrización $\mathbf{x}$ es regular si Φ tiene ceros sólo en los polos de Ψ y allí vale que $\Phi\Psi^2 \neq 0$.

Representación de Weierstrass

Obs!

- Incluso las elecciones más simples de Φ y Ψ conducen a ejemplos interesantes de superficies mínimas.

- Si Ψ es constante, esto nos lleva a una relación lineal entre las funciones F_1, F_2 y F_3. En consecuencia, esto produce una parametrización del plano.

- Por otro lado, Φ sí puede ser constante, como veremos en uno de los ejemplos en los seminarios.

Ejemplos de superficies mínimas

Ejemplo 1: (Trivial)
El plano es una superficie mínima, pues $H \equiv 0$.

Otros ejemplos de superficies mínimas:

- Catenoide
- Helicoide
- Superficie de Enneper
- Superficie de Henneberg
- Superficie de Costa
- Superficie de Scherk I y II
- ...

Ejemplos de superficies mínimas

Tema del seminario:

1. Catenoide y Helicoide + ¿cuál es la relación entre ambas?
2. Superficie de Catalán,
3. Superficie de Costa,
4. Superficie de Enneper,
5. Superficie de Henneberg,
6. Superficie de Bour,
7. Superficies de Scherk I y II,
8. Superficie de Schwarz,
9. Superficie de Riemman.

Ejemplos de superficies mínimas

¿Qué hay que hacer?

Preparar una presentación del tema (20 minutos máximo).

1. breve historia
2. propiedades interesantes/importantes
3. parametrizaciones
4. mostrar por qué es superficie mínima
5. ...

Importante

- Fechas de presentación: semana de finales.
- Enviar slides `.pdf` por correo al menos 1 semana antes.