

LA APLICACIÓN DE GAUSS Y LA SEGUNDA FORMA FUNDAMENTAL

ALAN REYES-FIGUEROA
GEOMETRÍA DIFERENCIAL

(AULA 24) 10.ABRIL.2025

La aplicación de Gauss

En el caso de una curva regular α (parametrizada por longitud de arco), ya vimos que la curvatura está dada por la norma del vector $\mathbf{t}'(s) = \alpha''(s)$, esto es $\mathbf{t}'(s) = \kappa(s)\mathbf{n}(s)$.
¿Podemos definir un concepto similar para superficies regulares?

Sea S una superficie orientada (ya sea por la elección de un atlas coherente maximal, o por la elección de un campo normal diferenciable), y sea $\mathbf{x} : U \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow V \cap S$ una parametrización en una vecindad de $\mathbf{p} \in S$.

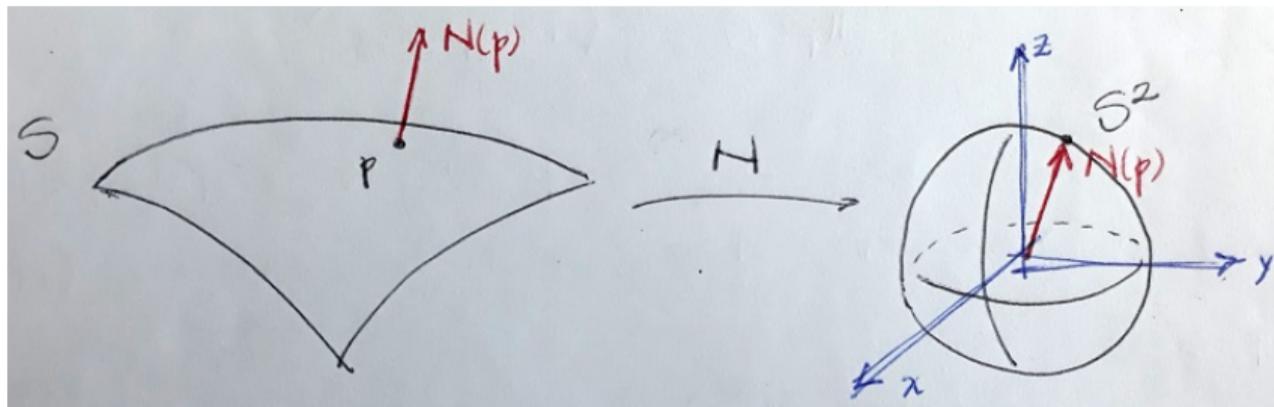
Consideramos la siguiente aplicación $N : S \rightarrow \mathbb{R}^3$, dada por

$$N(\mathbf{p}) = \frac{\mathbf{x}_u(\mathbf{q}) \times \mathbf{x}_v(\mathbf{q})}{|\mathbf{x}_u(\mathbf{q}) \times \mathbf{x}_v(\mathbf{q})|}, \quad \text{con } \mathbf{q} = \mathbf{x}^{-1}(\mathbf{p}).$$

La aplicación de Gauss

Definición

Dada una superficie orientada S , la aplicación $N : S \rightarrow S^2$ dada por el vector normal unitario $N(\mathbf{p})$ que define la orientación de S es llamada la **aplicación de Gauss** ó **aplicación normal de Gauss**.



La aplicación de Gauss

N es un mapa diferenciable entre superficies. Su derivada $DN(\mathbf{p}) : T_{\mathbf{p}}S \rightarrow T_{N(\mathbf{p})}S^2$ es tal que si α es una curva diferenciable sobre S , $\alpha : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow S$, con $\alpha(0) = \mathbf{p}$ y $\alpha'(0) = \mathbf{v}$, entonces

$$DN(\mathbf{p}) \cdot \mathbf{v} = (N \circ \alpha)'(0).$$

Obs!

- Como $S^2 = f^{-1}(1)$, donde $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$ y 1 es valor regular de f , entonces $T_{\mathbf{q}}S^2 = \langle \nabla f(\mathbf{q}) \rangle^\perp = \text{Ker } Df(\mathbf{q})$.

En particular, $\nabla f(x, y, z) = 2(x, y, z) \Rightarrow \nabla f(\mathbf{q}) = 2\mathbf{q}$ y $T_{\mathbf{q}}S^2 = \langle \mathbf{q} \rangle^\perp$.

- En conclusión, $T_{N(\mathbf{p})}S^2 = \langle N(\mathbf{p}) \rangle^\perp = T_{\mathbf{p}}S$, y podemos pensar en la derivada de la aplicación de Gauss como un mapa $DN(\mathbf{p}) : T_{\mathbf{p}}S \rightarrow T_{\mathbf{p}}S, \forall \mathbf{p} \in S$.

La aplicación de Gauss

Propiedad

$DN(\mathbf{p}) : T_{\mathbf{p}}S \rightarrow T_{\mathbf{p}}S$ es una transformación lineal auto-adjunta.

Prueba:

Sea $\mathbf{x} : U \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow V \cap S$ una parametrización, y sea $\mathbf{p} \in V \cap S$. Como $N(\mathbf{p}) \perp \mathbf{x}_u, \mathbf{x}_v$, tenemos que

$$\langle N \circ \mathbf{x}(\mathbf{q}), \mathbf{x}_u \rangle = 0 \quad \text{y} \quad \langle N \circ \mathbf{x}(\mathbf{q}), \mathbf{x}_v \rangle = 0.$$

Derivando con respecto a u y v , obtenemos

$$\langle DN(\mathbf{p}) \cdot \mathbf{x}_v, \mathbf{x}_u \rangle + \langle N, \mathbf{x}_{uv} \rangle = 0,$$

$$\langle DN(\mathbf{p}) \cdot \mathbf{x}_u, \mathbf{x}_v \rangle + \langle N, \mathbf{x}_{vu} \rangle = 0.$$

La aplicación de Gauss

Siendo \mathbf{x} de clase C^2 , entonces $\mathbf{x}_{uv} = \mathbf{x}_{vu}$, luego

$$\begin{aligned}\langle DN(\mathbf{p}) \cdot \mathbf{x}_u, \mathbf{x}_v \rangle &= -\langle N, \mathbf{x}_{vu} \rangle = -\langle N, \mathbf{x}_{uv} \rangle = \langle DN(\mathbf{p}) \cdot \mathbf{x}_v, \mathbf{x}_u \rangle \\ &= \langle \mathbf{x}_u, DN(\mathbf{p}) \cdot \mathbf{x}_v \rangle.\end{aligned}$$

Por simetría del producto interno, también tenemos

$$\begin{aligned}\langle DN(\mathbf{p}) \cdot \mathbf{x}_u, \mathbf{x}_u \rangle &= \langle \mathbf{x}_u, DN(\mathbf{p}) \cdot \mathbf{x}_u \rangle, \\ \langle DN(\mathbf{p}) \cdot \mathbf{x}_v, \mathbf{x}_v \rangle &= \langle \mathbf{x}_v, DN(\mathbf{p}) \cdot \mathbf{x}_v \rangle.\end{aligned}$$

Extendiendo por linealidad las relaciones anteriores, se obtiene

$$\langle DN(\mathbf{p}) \cdot \mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2 \rangle = \langle \mathbf{w}_1, DN(\mathbf{p}) \cdot \mathbf{w}_2 \rangle, \quad \forall \mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2 \in T_{\mathbf{p}}S. \quad \square$$

Segunda forma fundamental

Definición

Sea S una superficie orientada. La **segunda forma fundamental** de S en \mathbf{p} es la forma cuadrática $II_{\mathbf{p}} : T_{\mathbf{p}}S \rightarrow \mathbb{R}$ dada por

$$II_{\mathbf{p}}(\mathbf{v}) = -\langle DN(\mathbf{p}) \cdot \mathbf{v}, \mathbf{v} \rangle.$$

Si $\alpha : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow S$ es una curva con $\alpha(0) = \mathbf{p}$ y $\alpha'(0) = \mathbf{v}$, y $|\alpha'(s)| = 1$, para todo $s \in (-\varepsilon, \varepsilon)$, entonces

$$\langle N(\alpha(s)), \alpha'(s) \rangle = 0, \quad \forall s.$$

Diferenciando en s obtenemos $\langle N, \alpha''(s) \rangle + \langle DN(\alpha) \cdot \alpha'(s), \alpha'(s) \rangle = 0, \forall s$. En particular, para $s = 0$

$$\langle N(\mathbf{p}), \alpha''(0) \rangle = -\langle DN(\mathbf{p}) \cdot \mathbf{v}, \mathbf{v} \rangle = II_{\mathbf{p}}(\mathbf{v}).$$

Segunda forma fundamental

Como $\alpha''(\mathbf{o}) = \kappa(\mathbf{o})\mathbf{n}(\mathbf{o}) = \kappa\mathbf{n}$, tenemos que

$$II_{\mathbf{p}}(\mathbf{v}) = \kappa\langle N(\mathbf{p}), \mathbf{n} \rangle.$$

Definición

El número $\kappa\langle N(\mathbf{p}), \mathbf{n} \rangle$ es llamado la **curvatura normal** de α en S en \mathbf{p} .

Pregunta: ¿Qué ocurre si tomamos otra curva $\beta : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow S$, con $\beta(\mathbf{o}) = \mathbf{p}$, $\beta'(\mathbf{o}) = \mathbf{v}$?

Teorema (Meusnier)

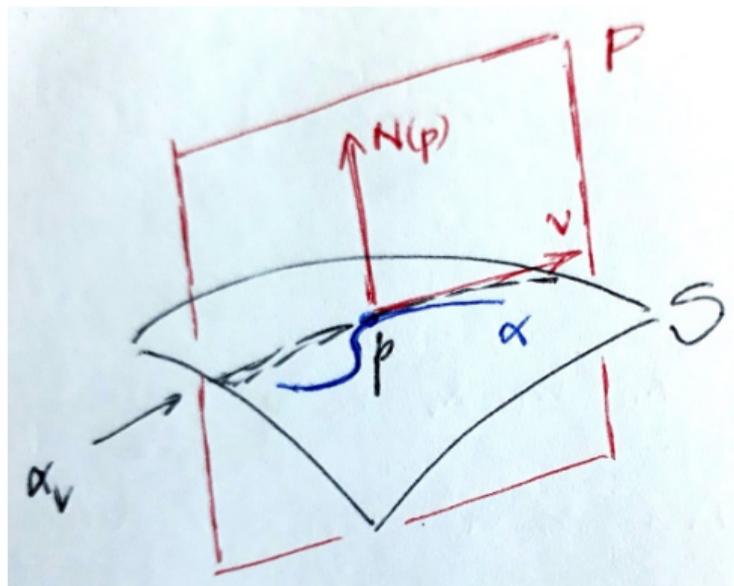
Cualesquiera dos curvas α, β en S , pasando por \mathbf{p} y tangentes entre sí (esto es, $\alpha(\mathbf{o}) = \mathbf{p} = \beta(\mathbf{o})$, $\alpha'(\mathbf{o}) = \mathbf{v} = \pm\beta'(\mathbf{o})$) poseen la misma curvatura normal.

Segunda forma fundamental

Del teorema de Meusnier, tenemos que la curvatura normal no depende de la orientación de la curva, pero cambia de signo al mudar la orientación de S .

Sea P el plano que pasa por \mathbf{p} , y que es generado por los vectores $\mathbf{v} = \alpha'(0)$, $\mathbf{N} = N(\mathbf{p})$.

S y P son superficies transversales \Rightarrow $\alpha_{\mathbf{v}} = S \cap P$ es una curva regular, llamada la **sección normal** de S en \mathbf{p} , en la dirección de \mathbf{v} .



Obs! Si $\alpha_{\mathbf{v}}$ es tal que $\alpha_{\mathbf{v}}(\mathbf{o}) = \mathbf{p}$, $\alpha'_{\mathbf{v}}(\mathbf{o}) = \mathbf{v}$ y $\mathbf{n}_{\alpha_{\mathbf{v}}}(\mathbf{o}) = \mathbf{N}(\mathbf{p})$, entonces la segunda forma fundamental está dada por $II_{\mathbf{p}}(\mathbf{v}) = \kappa_{\alpha_{\mathbf{v}}} \langle \mathbf{N}(\mathbf{p}), \mathbf{n} \rangle = \kappa_{\alpha_{\mathbf{v}}}$.

Teorema (Teorema Espectral para operadores auto-adjuntos)

Sea V espacio vectorial de dimensión finita n , con producto interno $\langle \cdot, \cdot \rangle$, y $A : V \rightarrow V$ un operador auto-adjunto. Entonces, A admite una descomposición de la forma

$$A = U\Lambda U^T,$$

donde $\Lambda = \text{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)$ es la matriz diagonal formada por los autovalores $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_n$ de A , y $U = (\mathbf{u}_1 \ \mathbf{u}_2 \ \dots \ \mathbf{u}_n) \in \mathbb{R}^{n \times n}$ es una matriz ortogonal cuyas columnas son los autovalores de A , con \mathbf{u}_i el autovalor correspondiente a λ_i , $i = 1, 2, \dots, n$.

En particular, existe una base ortonormal $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_n$ de V , tal que en esta base, A es diagonalizable, i.e.

$$A\mathbf{u}_i = \lambda_i\mathbf{u}_i, \quad \text{para } i = 1, 2, \dots, n.$$

Corolario

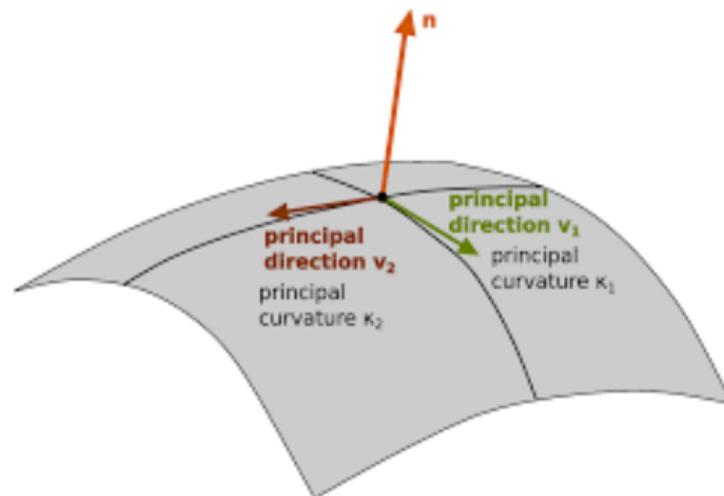
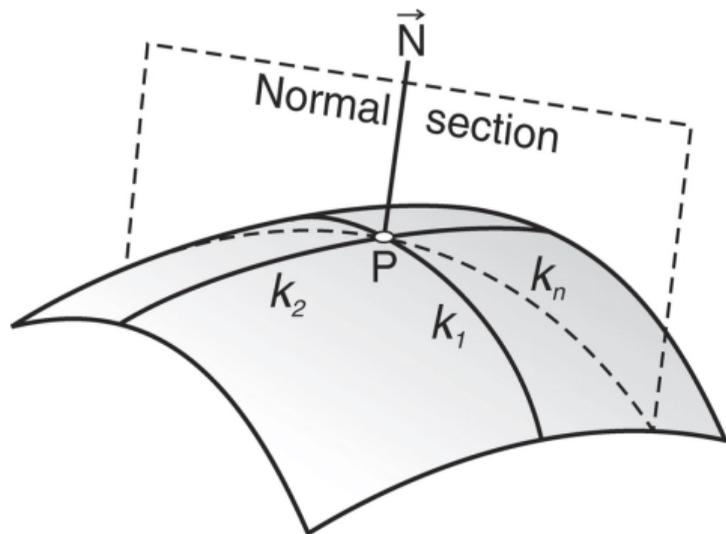
Si S es una superficie orientada, para todo punto $\mathbf{p} \in S$ existe una base ortonormal $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2\}$ de $T_{\mathbf{p}}S$ tal que

$$DN(\mathbf{p}) \cdot \mathbf{e}_1 = -\kappa_1\mathbf{e}_1, \quad \text{y} \quad DN(\mathbf{p}) \cdot \mathbf{e}_2 = -\kappa_2\mathbf{e}_2.$$

Curvaturas

Definición

κ_1 y κ_2 se llaman las **curvaturas principales** de S en \mathbf{p} . Los vectores \mathbf{e}_1 y \mathbf{e}_2 se les llama las **direcciones principales** de S en \mathbf{p} .



Propiedad (Euler, 1760)

Sea S superficie orientada, $\mathbf{p} \in S$. Para cualquier vector $\mathbf{v} \in T_{\mathbf{p}}S$ se tiene que $\kappa_1 \geq \kappa(\alpha_{\mathbf{v}}) \geq \kappa_2$. Así, κ_1 y κ_2 corresponden a las curvaturas normales máxima y mínima en \mathbf{p} , respectivamente.

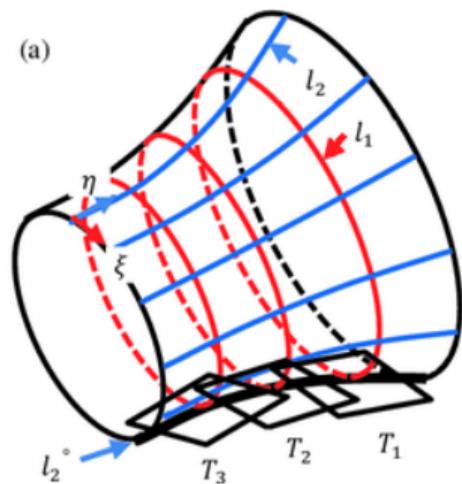
Prueba:

Tomemos $\mathbf{v} \in T_{\mathbf{p}}S$, con $|\mathbf{v}| = 1$. Podemos escribir $\mathbf{v} = \cos \varphi \mathbf{e}_1 + \sin \varphi \mathbf{e}_2$. Entonces,

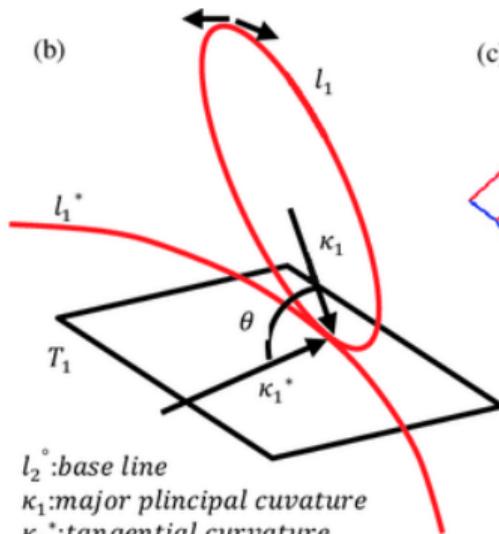
$$\begin{aligned} I_{\mathbf{p}}(\mathbf{v}) &= -\langle DN(\mathbf{p}) \cdot \mathbf{v}, \mathbf{v} \rangle = -\langle DN(\mathbf{p}) \cdot (\cos \varphi \mathbf{e}_1 + \sin \varphi \mathbf{e}_2), \cos \varphi \mathbf{e}_1 + \sin \varphi \mathbf{e}_2 \rangle \\ &= -\langle -\kappa_1 \cos \varphi \mathbf{e}_1 - \kappa_2 \sin \varphi \mathbf{e}_2, \cos \varphi \mathbf{e}_1 + \sin \varphi \mathbf{e}_2 \rangle \\ &= \kappa_1 \cos^2 \varphi + \kappa_2 \sin^2 \varphi. \end{aligned}$$

Si $\kappa_1 \geq \kappa_2 \Rightarrow \kappa_1 = \kappa_1(\cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi) \geq I_{\mathbf{p}}(\mathbf{v}) \geq \kappa_2(\cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi) = \kappa_2$. \square

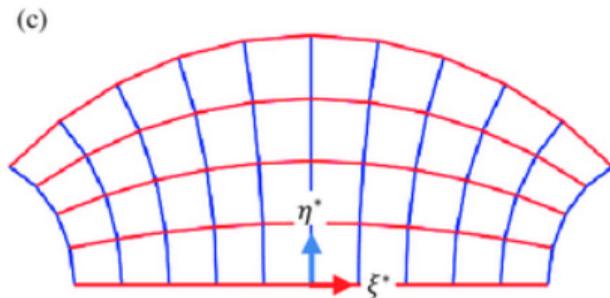
Curvaturas



l_1 : major principal curvature line
 l_2 : minor principal curvature line
 $T_1 \sim T_3$: tangential plane



l_2° : base line
 κ_1 : major principal curvature
 κ_1^* : tangential curvature
 θ : formed angle by κ_1 and κ_1^*
 l_1^* : the line expanded from l_1



ξ, ξ^* : coordinate along l_1, l_1^*
 η, η^* : coordinate along l_2, l_2^*

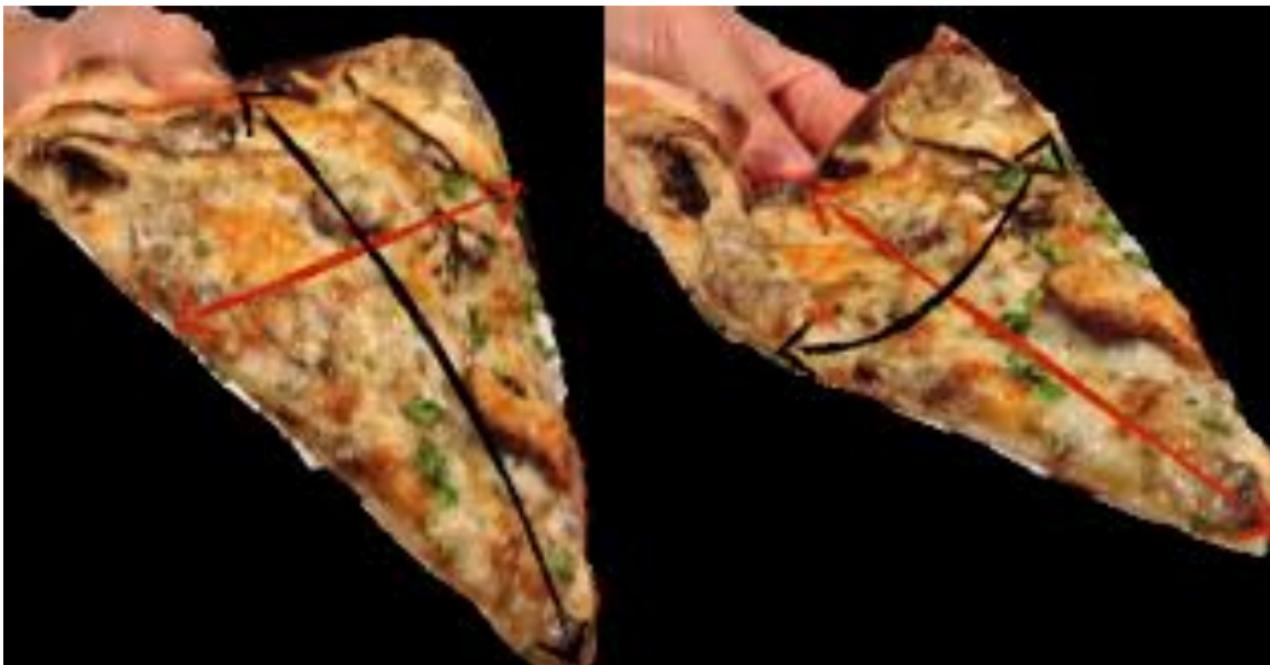
Green strain tensor: $E_{ij} = \frac{1}{2}(F_{ki}F_{kj} - \delta_{ij})$

Position vector: $\mathbf{x}(\xi, \eta), \mathbf{x}^*(\xi^*, \eta^*)$

$*F_{ij} = \frac{dx(\xi, \eta)}{dx^*(\xi^*, \eta^*)}$

Las curvaturas principales κ_1 y κ_2 están relacionadas con el tensor de estrés.

Curvaturas



Gauss nos enseña hasta como se debe tomar un pedazo de pizza.

Ejemplos

Ejemplo 1: (El plano)

Tomemos la parametrización $\mathbf{x}(u, v) = \mathbf{p}_0 + u\mathbf{w}_1 + v\mathbf{w}_2$, con $\{\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2\}$ base del plano. Luego, $\mathbf{x}_u = \mathbf{w}_1$, $\mathbf{x}_v = \mathbf{w}_2$.

De ahí,

$$N(\mathbf{p}) = \frac{\mathbf{x}_u(\mathbf{p}) \times \mathbf{x}_v(\mathbf{p})}{|\mathbf{x}_u(\mathbf{p}) \times \mathbf{x}_v(\mathbf{p})|} = \frac{\mathbf{w}_1 \times \mathbf{w}_2}{|\mathbf{w}_1 \times \mathbf{w}_2|}$$

es constante.

$\Rightarrow DN(\mathbf{p}) = \mathbf{0}$, $\forall \mathbf{p} \in S$. Así, si \mathbf{e}_1 y \mathbf{e}_2 son las direcciones principales, entonces

$$DN(\mathbf{p}) \cdot \mathbf{e}_1 = \mathbf{0} = 0\mathbf{e}_1, \quad DN(\mathbf{p}) \cdot \mathbf{e}_2 = \mathbf{0} = 0\mathbf{e}_2.$$

De modo que $\kappa_1 = 0$ y $\kappa_2 = 0$.

En este caso $II_{\mathbf{p}}(\mathbf{v}) = 0$, para todo $\mathbf{v} \in T_{\mathbf{p}}S$.

Ejemplos

Ejemplo 2: (Esfera de radio R)

Para una esfera S^2 de radio R (centrada en el origen), tenemos que la aplicación de Gauss, con la orientación que apunta todos los vectores normales hacia el origen, es

$$N(\mathbf{p}) = -\frac{1}{R}\mathbf{p}, \quad \forall \mathbf{p} \in S^2.$$

Luego, $DN(\mathbf{p}) \cdot \mathbf{v} = -\frac{1}{R}I \cdot \mathbf{v} = -\frac{1}{R}\mathbf{v}$, $\forall \mathbf{v} \in T_{\mathbf{p}}S^2$. En particular,

$$II_{\mathbf{p}}(\mathbf{v}) = -\langle DN(\mathbf{p}) \cdot \mathbf{v}, \mathbf{v} \rangle = \frac{1}{R}\|\mathbf{v}\|^2.$$

Si \mathbf{e}_1 y \mathbf{e}_2 son las direcciones principales en S^2_R , entonces

$$DN(\mathbf{p}) \cdot \mathbf{e}_1 = -\frac{1}{R}\mathbf{e}_1, \quad DN(\mathbf{p}) \cdot \mathbf{e}_2 = -\frac{1}{R}\mathbf{e}_2.$$

Luego, $\kappa_1 = \frac{1}{R}$ y $\kappa_2 = \frac{1}{R}$, y $II_{\mathbf{p}}(\mathbf{v}) = -\frac{1}{R}$, para todo $\mathbf{v} \in T_{\mathbf{p}}S^2$.

Ejemplo 3: (Cilindro)

Consideramos el cilindro $S = S^1 \times \mathbb{R} = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 = R^2\}$. $S = f^{-1}(R^2)$, con $f(x, y, z) = x^2 + y^2$, y como R^2 es valor regular de f , S es superficie regular orientable. Además,

$$N(\mathbf{p}) = -\frac{\nabla f(x, y, z)}{|\nabla f(x, y, z)|} = \frac{(2x, 2y, 0)}{|(2x, 2y, 0)|} = -\frac{1}{R}(x, y, 0) = -\frac{1}{R}\mathbf{p}.$$

Consideramos la curva $(x(t), y(t), z(t))$ contenida en el cilindro, es decir, con $x(t)^2 + y(t)^2 = R^2$. A lo largo de esta curva, $N(t) = \frac{1}{R}(-x(t), -y(t), 0)$ y por lo tanto,

$$DN(\mathbf{p}) \cdot (x'(t), y'(t), z'(t)) = N'(t) = \frac{1}{R}(-x'(t), -y'(t), 0).$$

Ejemplos

Concluimos lo siguiente:

Si \mathbf{w}_1 es un vector tangente al cilindro y paralelo al eje z , entonces $DN(\mathbf{p}) \cdot \mathbf{w}_1 = \mathbf{0} = 0\mathbf{w}_1$;

si \mathbf{w}_2 es un vector tangente al cilindro y paralelo al plano xy , entonces $DN(\mathbf{p}) \cdot \mathbf{w}_2 = -\frac{1}{R}\mathbf{w}_2$.

De ello se deduce que \mathbf{w}_1 y \mathbf{w}_2 son los autovectores de $DN(\mathbf{p})$, con autovalores $\kappa_1 = 0$ y $\kappa_2 = \frac{1}{R}$, respectivamente.

