

# **LA APLICACIÓN DE GAUSS Y LA SEGUNDA FORMA FUNDAMENTAL**

ALAN REYES-FIGUEROA  
GEOMETRÍA DIFERENCIAL

(AULA 23) 03.ABRIL.2025

# La aplicación de Gauss

En el caso de una curva regular  $\alpha$  (parametrizada por longitud de arco), ya vimos que la curvatura está dada por la norma del vector  $\mathbf{t}'(s) = \alpha''(s)$ , esto es  $\mathbf{t}'(s) = \kappa(s)\mathbf{n}(s)$ .  
¿Podemos definir un concepto similar para superficies regulares?

Sea  $S$  una superficie orientada (ya sea por la elección de un atlas coherente maximal, o por la elección de un campo normal diferenciable), y sea  $\mathbf{x} : U \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow V \cap S$  una parametrización en una vecindad de  $\mathbf{p} \in S$ .

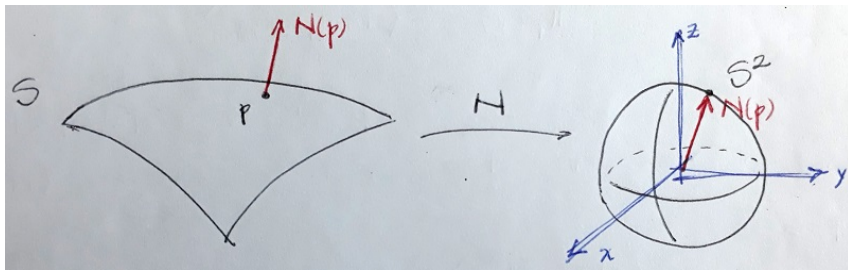
Consideramos la siguiente aplicación  $N : S \rightarrow \mathbb{R}^3$ , dada por

$$N(\mathbf{p}) = \frac{\mathbf{x}_u(\mathbf{q}) \times \mathbf{x}_v(\mathbf{q})}{|\mathbf{x}_u(\mathbf{q}) \times \mathbf{x}_v(\mathbf{q})|}, \quad \text{con } \mathbf{q} = \mathbf{x}^{-1}(\mathbf{p}).$$

# La aplicación de Gauss

## Definición

Dada una superficie orientada  $S$ , la aplicación  $N : S \rightarrow S^2$  dada por el vector normal unitario  $N(\mathbf{p})$  que define la orientación de  $S$  es llamada la **aplicación de Gauss** ó **aplicación normal de Gauss**.



# La aplicación de Gauss

$N$  es un mapa diferenciable entre superficies. Su derivada  $DN(\mathbf{p}) : T_{\mathbf{p}}S \rightarrow T_{N(\mathbf{p})}S^2$  es tal que si  $\alpha$  es una curva diferenciable sobre  $S$ ,  $\alpha : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow S$ , con  $\alpha(0) = \mathbf{p}$  y  $\alpha'(0) = \mathbf{v}$ , entonces

$$DN(\mathbf{p}) \cdot \mathbf{v} = (N \circ \alpha)'(0).$$

**Obs!**

- Como  $S^2 = f^{-1}(1)$ , donde  $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$  y 1 es valor regular de  $f$ , entonces  $T_{\mathbf{q}}S^2 = \langle \nabla f(\mathbf{q}) \rangle^\perp = \text{Ker } Df(\mathbf{q})$ .

En particular,  $\nabla f(x, y, z) = 2(x, y, z) \Rightarrow \nabla f(\mathbf{q}) = 2\mathbf{q}$  y  $T_{\mathbf{q}}S^2 = \langle \mathbf{q} \rangle^\perp$ .

- En conclusión,  $T_{N(\mathbf{p})}S^2 = \langle N(\mathbf{p}) \rangle^\perp = T_{\mathbf{p}}S$ , y podemos pensar en la derivada de la aplicación de Gauss como un mapa  $DN(\mathbf{p}) : T_{\mathbf{p}}S \rightarrow T_{\mathbf{p}}S, \forall \mathbf{p} \in S$ .

# La aplicación de Gauss

## Propiedad

$DN(\mathbf{p}) : T_{\mathbf{p}}S \rightarrow T_{\mathbf{p}}S$  es una transformación lineal auto-adjunta.

Prueba:

Sea  $\mathbf{x} : U \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow V \cap S$  una parametrización, y sea  $\mathbf{p} \in V \cap S$ . Como  $N(\mathbf{p}) \perp \mathbf{x}_u, \mathbf{x}_v$ , tenemos que

$$\langle N \circ \mathbf{x}(\mathbf{q}), \mathbf{x}_u \rangle = 0 \quad \text{y} \quad \langle N \circ \mathbf{x}(\mathbf{q}), \mathbf{x}_v \rangle = 0.$$

Derivando con respecto a  $u$  y  $v$ , obtenemos

$$\langle DN(\mathbf{p}) \cdot \mathbf{x}_v, \mathbf{x}_u \rangle + \langle N, \mathbf{x}_{uv} \rangle = 0,$$

$$\langle DN(\mathbf{p}) \cdot \mathbf{x}_u, \mathbf{x}_v \rangle + \langle N, \mathbf{x}_{vu} \rangle = 0.$$

# La aplicación de Gauss

Siendo  $\mathbf{x}$  de clase  $C^2$ , entonces  $\mathbf{x}_{uv} = \mathbf{x}_{vu}$ , luego

$$\begin{aligned}\langle DN(\mathbf{p}) \cdot \mathbf{x}_u, \mathbf{x}_v \rangle &= -\langle N, \mathbf{x}_{vu} \rangle = -\langle N, \mathbf{x}_{uv} \rangle = \langle DN(\mathbf{p}) \cdot \mathbf{x}_v, \mathbf{x}_u \rangle \\ &= \langle \mathbf{x}_u, DN(\mathbf{p}) \cdot \mathbf{x}_v \rangle.\end{aligned}$$

Por simetría del producto interno, también tenemos

$$\begin{aligned}\langle DN(\mathbf{p}) \cdot \mathbf{x}_u, \mathbf{x}_u \rangle &= \langle \mathbf{x}_u, DN(\mathbf{p}) \cdot \mathbf{x}_u \rangle, \\ \langle DN(\mathbf{p}) \cdot \mathbf{x}_v, \mathbf{x}_v \rangle &= \langle \mathbf{x}_v, DN(\mathbf{p}) \cdot \mathbf{x}_v \rangle.\end{aligned}$$

Extendiendo por linealidad las relaciones anteriores, se obtiene

$$\langle DN(\mathbf{p}) \cdot \mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2 \rangle = \langle \mathbf{w}_1, DN(\mathbf{p}) \cdot \mathbf{w}_2 \rangle, \quad \forall \mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2 \in T_{\mathbf{p}}S. \quad \square$$

# Segunda forma fundamental

## Definición

Sea  $S$  una superficie orientada. La **segunda forma fundamental** de  $S$  en  $\mathbf{p}$  es la forma cuadrática  $II_{\mathbf{p}} : T_{\mathbf{p}}S \rightarrow \mathbb{R}$  dada por

$$II_{\mathbf{p}}(\mathbf{v}) = -\langle DN(\mathbf{p}) \cdot \mathbf{v}, \mathbf{v} \rangle.$$

Si  $\alpha : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow S$  es una curva con  $\alpha(0) = \mathbf{p}$  y  $\alpha'(0) = \mathbf{v}$ , y  $|\alpha'(s)| = 1$ , para todo  $s \in (-\varepsilon, \varepsilon)$ , entonces

$$\langle N(\alpha(s)), \alpha'(s) \rangle = 0, \quad \forall s.$$

Diferenciando en  $s$  obtenemos  $\langle N, \alpha''(s) \rangle + \langle DN(\alpha) \cdot \alpha'(s), \alpha'(s) \rangle = 0, \forall s$ . En particular, para  $s = 0$

$$\langle N(\mathbf{p}), \alpha''(0) \rangle = -\langle DN(\mathbf{p}) \cdot \mathbf{v}, \mathbf{v} \rangle = II_{\mathbf{p}}(\mathbf{v}).$$

# Segunda forma fundamental

Como  $\alpha''(o) = \kappa(o)\mathbf{n}(o) = \kappa\mathbf{n}$ , tenemos que

$$II_{\mathbf{p}}(\mathbf{v}) = \kappa \langle N(\mathbf{p}), \mathbf{n} \rangle.$$

## Definición

El número  $\kappa \langle N(\mathbf{p}), \mathbf{n} \rangle$  es llamado la **curvatura normal** de  $\alpha$  en  $S$  en  $\mathbf{p}$ .

Pregunta: ¿Qué ocurre si tomamos otra curva  $\beta : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow S$ , con  $\beta(o) = \mathbf{p}$ ,  $\beta'(o) = \mathbf{v}$ ?

## Teorema (Meusnier)

Cualesquiera dos curvas  $\alpha, \beta$  en  $S$ , pasando por  $\mathbf{p}$  y tangentes entre sí (esto es,  $\alpha(o) = \mathbf{p} = \beta(o)$ ,  $\alpha'(o) = \mathbf{v} = \pm\beta'(o)$ ) poseen la misma curvatura normal.

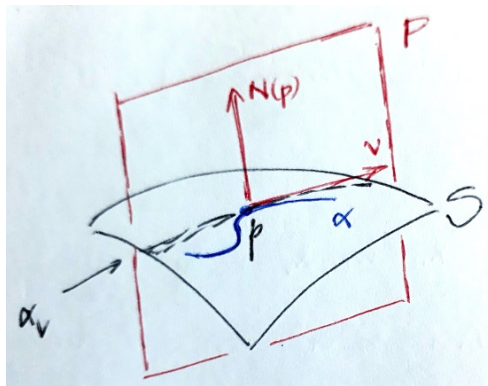


# Segunda forma fundamental

Del teorema de Meusnier, tenemos que la curvatura normal no depende de la orientación de la curva, pero cambia de signo al mudar la orientación de  $S$ .

Sea  $P$  el plano que pasa por  $\mathbf{p}$ , y que es generado por los vectores  $\mathbf{v} = \alpha'(0)$ ,  $\mathbf{N} = N(\mathbf{p})$ .

$S$  y  $P$  son superficies transversales  $\Rightarrow$   
 $\alpha_{\mathbf{v}} = S \cap P$  es una curva regular, llamada la **sección normal** de  $S$  en  $\mathbf{p}$ , en la dirección de  $\mathbf{v}$ .



**Obs!** Si  $\alpha_{\mathbf{v}}$  es tal que  $\alpha_{\mathbf{v}}(\mathbf{o}) = \mathbf{p}$ ,  $\alpha'_{\mathbf{v}}(\mathbf{o}) = \mathbf{v}$  y  $\mathbf{n}_{\alpha_{\mathbf{v}}}(\mathbf{o}) = N(\mathbf{p})$ , entonces la segunda forma fundamental está dada por  $II_{\mathbf{p}}(\mathbf{v}) = \kappa_{\alpha_{\mathbf{v}}} \langle N(\mathbf{p}), \mathbf{n} \rangle = \kappa_{\alpha_{\mathbf{v}}}$ .

## Teorema (Teorema Espectral para operadores auto-adjuntos)

Sea  $V$  espacio vectorial de dimensión finita  $n$ , con producto interno  $\langle \cdot, \cdot \rangle$ , y  $A : V \rightarrow V$  un operador auto-adjunto. Entonces,  $A$  admite una descomposición de la forma

$$A = U \Lambda U^T,$$

donde  $\Lambda = \text{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)$  es la matriz diagonal formada por los autovalores  $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_n$  de  $A$ , y  $U = (\mathbf{u}_1 \quad \mathbf{u}_2 \quad \dots \quad \mathbf{u}_n) \in \mathbb{R}^{n \times n}$  es una matriz ortogonal cuyas columnas son los autovectores de  $A$ , con  $\mathbf{u}_i$  el autovector correspondiente a  $\lambda_i$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$ .

En particular, existe una base ortonormal  $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_n$  de  $V$ , tal que en esta base,  $A$  es diagonalizable, i.e.

$$A\mathbf{u}_i = \lambda_i\mathbf{u}_i, \quad \text{para } i = 1, 2, \dots, n.$$

## Corolario

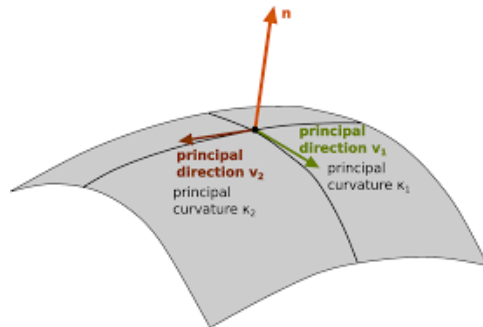
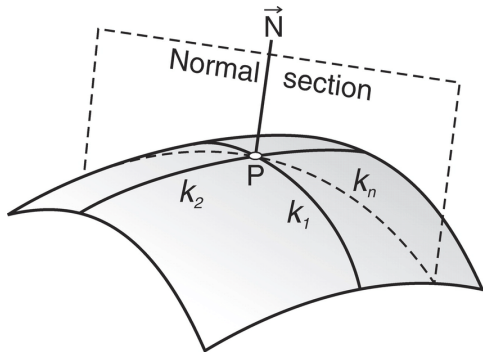
Si  $S$  es una superficie orientada, para todo punto  $\mathbf{p} \in S$  existe una base ortonormal  $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2\}$  de  $T_{\mathbf{p}}S$  tal que

$$DN(\mathbf{p}) \cdot \mathbf{e}_1 = -\kappa_1\mathbf{e}_1, \quad \text{y} \quad DN(\mathbf{p}) \cdot \mathbf{e}_2 = -\kappa_2\mathbf{e}_2.$$

# Curvaturas

## Definición

$\kappa_1$  y  $\kappa_2$  se llaman las **curvaturas principales** de  $S$  en  $\mathbf{p}$ . Los vectores  $\mathbf{e}_1$  y  $\mathbf{e}_2$  se les llama las **direcciones principales** de  $S$  en  $\mathbf{p}$ .



## Propiedad (Euler, 1760)

Sea  $S$  superficie orientada,  $\mathbf{p} \in S$ . Para cualquier vector  $\mathbf{v} \in T_{\mathbf{p}}S$  se tiene que  $\kappa_1 \geq \kappa(\alpha_{\mathbf{v}}) \geq \kappa_2$ . Así,  $\kappa_1$  y  $\kappa_2$  corresponden a las curvaturas normales máxima y mínima en  $\mathbf{p}$ , respectivamente.

Prueba:

Tomemos  $\mathbf{v} \in T_{\mathbf{p}}S$ , con  $|\mathbf{v}| = 1$ . Podemos escribir  $\mathbf{v} = \cos \varphi \mathbf{e}_1 + \sin \varphi \mathbf{e}_2$ . Entonces,

$$\begin{aligned} I_{\mathbf{p}}(\mathbf{v}) &= -\langle DN(\mathbf{p}) \cdot \mathbf{v}, \mathbf{v} \rangle = -\langle DN(\mathbf{p}) \cdot (\cos \varphi \mathbf{e}_1 + \sin \varphi \mathbf{e}_2), \cos \varphi \mathbf{e}_1 + \sin \varphi \mathbf{e}_2 \rangle \\ &= -\langle -\kappa_1 \cos \varphi \mathbf{e}_1 - \kappa_2 \sin \varphi \mathbf{e}_2, \cos \varphi \mathbf{e}_1 + \sin \varphi \mathbf{e}_2 \rangle \\ &= \kappa_1 \cos^2 \varphi + \kappa_2 \sin^2 \varphi. \end{aligned}$$

Si  $\kappa_1 \geq \kappa_2 \Rightarrow \kappa_1 = \kappa_1(\cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi) \geq I_{\mathbf{p}}(\mathbf{v}) \geq \kappa_2(\cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi) = \kappa_2$ .  $\square$