

LA PRIMERA FORMA FUNDAMENTAL

ALAN REYES-FIGUEROA
GEOMETRÍA DIFERENCIAL

(AULA 21) 27.MARZO.2025

Primera forma fundamental

Hasta ahora, hemos tratados a las superficies en \mathbb{R}^3 desde el punto de vista de la diferenciabilidad. Vamos ahora a introducir otras estructuras geométricas asociadas a una superficie S .

El producto interno $\langle \cdot, \cdot \rangle$ natural de $S \subseteq \mathbb{R}^3$ induce en cada plano tangente $T_p S$ de una superficie regular un producto interno, que denotamos por $\langle \cdot, \cdot \rangle_p$ dado por

$$\langle \mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2 \rangle_p = \langle \mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2 \rangle, \quad \forall \mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2 \in T_p S.$$

Este producto interno es una forma bilineal simétrica:

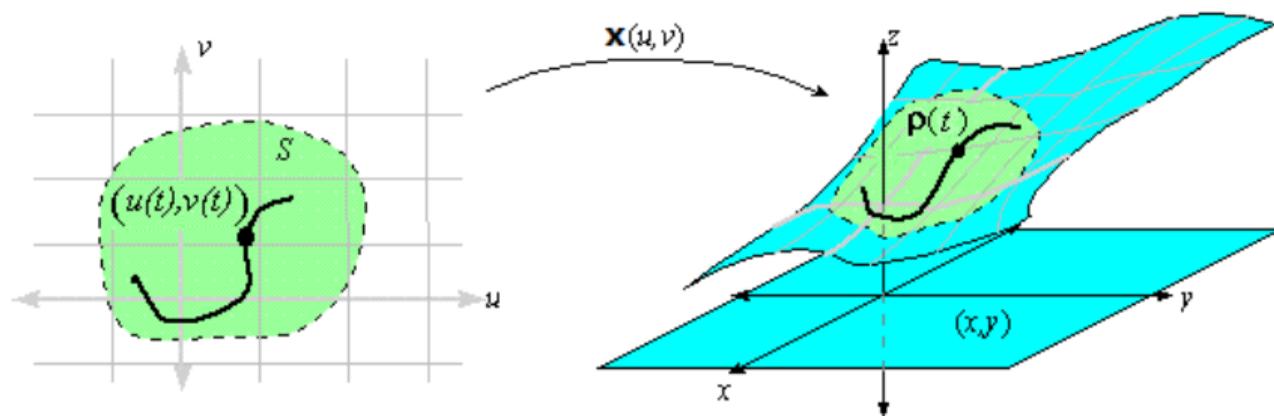
- $\langle a\mathbf{w}_1 + b\mathbf{w}_2, \mathbf{w}_3 \rangle_p = a\langle \mathbf{w}_1, \mathbf{w}_3 \rangle_p + b\langle \mathbf{w}_2, \mathbf{w}_3 \rangle_p;$
- $\langle \mathbf{w}_1, a\mathbf{w}_2 + b\mathbf{w}_3 \rangle_p = a\langle \mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2 \rangle_p + b\langle \mathbf{w}_1, \mathbf{w}_3 \rangle_p;$
- $\langle \mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2 \rangle_p = \langle \mathbf{w}_2, \mathbf{w}_1 \rangle_p.$

Primera forma fundamental

Si α es una curva diferenciable sobre la superficie S , cuando calculamos la longitud de arco de α

$$l(\alpha) = \int_a^b \|\alpha'(t)\| dt$$

nos gustaría utilizar elementos intrínsecos a la superficie S , sin hacer referencia al espacio métrico ambiente.



Primera forma fundamental

Definición

Sea $S \subseteq \mathbb{R}^3$ una superficie regular, $\mathbf{p} \in S$. La **primera forma fundamental** de S en \mathbf{p} es la forma cuadrática $I_{\mathbf{p}} : T_{\mathbf{p}}S \rightarrow \mathbb{R}$ dada por

$$I_{\mathbf{p}}(\mathbf{v}) = \langle \mathbf{v}, \mathbf{v} \rangle_{\mathbf{p}} = \|\mathbf{v}\|_{\mathbf{p}}^2, \quad \forall \mathbf{v} \in T_{\mathbf{p}}S.$$

Observaciones:

- $I_{\mathbf{p}}$ es apenas la expresión de cómo $T_{\mathbf{p}}S$ hereda la estructura de producto interno de \mathbb{R}^3 .
- $I_{\mathbf{p}}$ es el ejemplo más simple de una métrica Riemanniana.

Tenemos

$$\ell(\alpha) = \int_a^b \sqrt{I_{\alpha(t)}(\alpha'(t))} dt.$$

Primera forma fundamental

Sea $\mathbf{x} : U \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow V \cap S$ una parametrización de S , y sea $\alpha(t) = \mathbf{x}(u(t), v(t))$ una curva contenida en $V \cap S$. Como

$$\alpha'(t) = \mathbf{x}_u(\alpha(t)) \cdot u'(t) + \mathbf{x}_v(\alpha(t)) \cdot v'(t).$$

Si $\alpha : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow V \cap S$ es tal que $\mathbf{p} = \alpha(0) = \mathbf{x}(u_0, v_0)$, y $\alpha'(0) = \mathbf{v}$, entonces,

$$\mathbf{v} = \alpha'(0) = \mathbf{x}_u(\mathbf{p}) \cdot u'(0) + \mathbf{x}_v(\mathbf{p}) \cdot v'(0),$$

y podemos escribir

$$\begin{aligned} I_{\mathbf{p}}(\mathbf{v}) &= \langle \mathbf{v}, \mathbf{v} \rangle_{\mathbf{p}} = \langle \mathbf{x}_u \cdot u'(0) + \mathbf{x}_v \cdot v'(0), \mathbf{x}_u \cdot u'(0) + \mathbf{x}_v \cdot v'(0) \rangle_{\mathbf{p}} \\ &= (u'(0))^2 \langle \mathbf{x}_u, \mathbf{x}_u \rangle_{\mathbf{p}} + 2u'(0)v'(0) \langle \mathbf{x}_u, \mathbf{x}_v \rangle_{\mathbf{p}} + (v'(0))^2 \langle \mathbf{x}_v, \mathbf{x}_v \rangle_{\mathbf{p}}. \end{aligned}$$

Primera forma fundamental

Si definimos los coeficientes

$$E = E_{\mathbf{p}} = \langle \mathbf{x}_u(\mathbf{p}), \mathbf{x}_u(\mathbf{p}) \rangle_{\mathbf{p}} = \langle \mathbf{x}_u, \mathbf{x}_u \rangle_{\mathbf{p}},$$

$$F = F_{\mathbf{p}} = \langle \mathbf{x}_u(\mathbf{p}), \mathbf{x}_v(\mathbf{p}) \rangle_{\mathbf{p}} = \langle \mathbf{x}_u, \mathbf{x}_v \rangle_{\mathbf{p}},$$

$$G = G_{\mathbf{p}} = \langle \mathbf{x}_v(\mathbf{p}), \mathbf{x}_v(\mathbf{p}) \rangle_{\mathbf{p}} = \langle \mathbf{x}_v, \mathbf{x}_v \rangle_{\mathbf{p}},$$

Entonces la ecuación anterior se escribe como

$$I_{\mathbf{p}}(\alpha'(0)) = E(u')^2 + 2Fu'v' + G(v')^2 = (u', v') \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u' \\ v' \end{pmatrix}, \quad (1)$$

donde todos los coeficientes involucrados son calculados en $t = 0$:

$$E = E(u_0, v_0), \quad F = F(u_0, v_0), \quad G = G(u_0, v_0).$$

Primera forma fundamental

En otras palabras, E, F, G son los coeficientes de la primera forma fundamental en la base $\{\mathbf{x}_u, \mathbf{x}_v\}$ de T_pS .

En términos de los parámetros t , en ocasiones en otros libros la ecuación (1) se escribe como

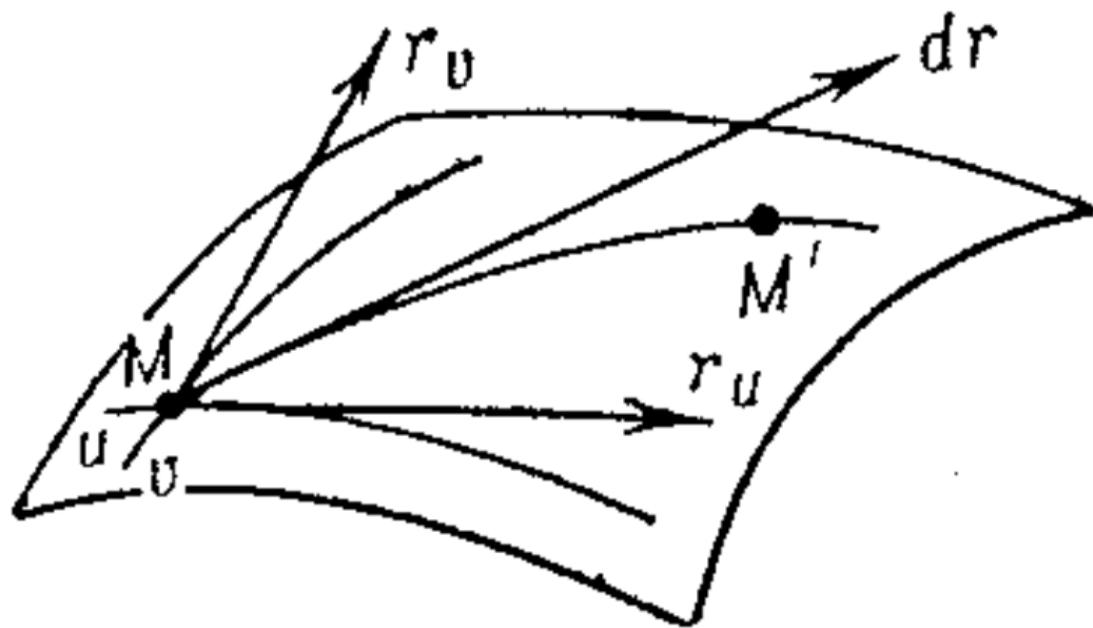
$$ds^2 = E du^2 + 2F du dv + G dv^2. \quad (2)$$

Aquí, ds^2 (ó ds) es llamado el *elemento de longitud de arco* o *elemento de línea*. Para la curva $\alpha(t) = \mathbf{x}(u(t), v(t))$, la expresión

$$\ell(\alpha) = \int_a^b \sqrt{E \left(\frac{du}{dt}\right)^2 + 2F \left(\frac{du}{dt}\right) \left(\frac{dv}{dt}\right) + G \left(\frac{dv}{dt}\right)^2} dt$$

da la longitud de arco.

Primera forma fundamental



Geometría de la primera forma fundamental.

Ejemplos

Ejemplo 1: (El plano en \mathbb{R}^3).

Sea $\{\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2\}$ una base ortonormal de un plano $S \subset \mathbb{R}^3$. Sea $\mathbf{p} \in S$, y consideramos la parametrización $\mathbf{x} : \mathbb{R}^2 \rightarrow S$ dada por

$$\mathbf{x}(u, v) = \mathbf{p} + u\mathbf{w}_1 + v\mathbf{w}_2, \quad u, v \in \mathbb{R}.$$

De ahí, $\mathbf{x}_u = \mathbf{w}_1$, $\mathbf{x}_v = \mathbf{w}_2$ y

$$E = E(u, v) = \langle \mathbf{x}_u, \mathbf{x}_u \rangle = \langle \mathbf{w}_1, \mathbf{w}_1 \rangle = 1,$$

$$F = F(u, v) = \langle \mathbf{x}_u, \mathbf{x}_v \rangle = \langle \mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2 \rangle = 0,$$

$$G = G(u, v) = \langle \mathbf{x}_v, \mathbf{x}_v \rangle = \langle \mathbf{w}_2, \mathbf{w}_2 \rangle = 1.$$

La 1a. forma fundamental es

$$I_{\mathbf{p}} = ds^2 = (u')^2 + (v')^2 = (u', v') \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u' \\ v' \end{pmatrix}.$$

Ejemplos

Ejemplo 2: (Superficies de revolución).

Considere la curva regular $(f(v), 0, g(v))$, con $f(v) > 0, \forall v \in I$, param. por longitud de arco. Parametrizamos una superficie de revolución S por

$$\mathbf{x}(u, v) = (f(v) \cos u, f(v) \sin u, g(v)), \quad u \in (0, 2\pi), v \in I.$$

Luego, $\mathbf{x}_u = (-f(v) \sin u, f(v) \cos u, 0)$, $\mathbf{x}_v = (f'(v) \cos u, f'(v) \sin u, g'(v))$, y

$$E = \langle \mathbf{x}_u, \mathbf{x}_u \rangle = f(v)^2 (\cos^2 u + \sin^2 u) = f(v)^2,$$

$$F = \langle \mathbf{x}_u, \mathbf{x}_v \rangle = f(v)f'(v)(-\sin u \cos u + \cos u \sin u) = 0,$$

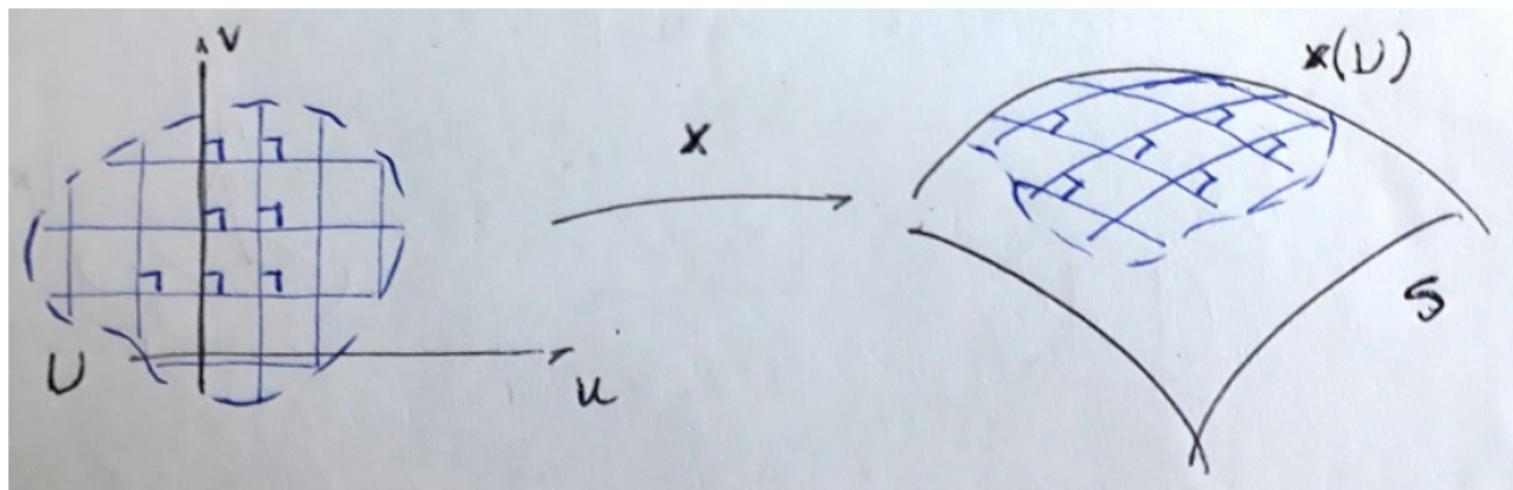
$$G = \langle \mathbf{x}_v, \mathbf{x}_v \rangle = f'(v)^2 (\cos^2 u + \sin^2 u) + g'(v)^2 = f'(v)^2 + g'(v)^2 = 1.$$

$$I_{\mathbf{p}} = (u', v') \begin{pmatrix} f'(v)^2 & 0 \\ 0 & f'(v)^2 + g'(v)^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u' \\ v' \end{pmatrix}.$$

Ejemplo

Definición

Las parametrizaciones $\mathbf{x}(u, v)$ con $F = 0$, se llaman **ortogonales**.



Isometrías

Definición

Un difeomorfismo $f : S_1 \rightarrow S_2$ entre superficies es llamada una **isometría** si

$$\langle Df(\mathbf{p}) \cdot \mathbf{u}, Df(\mathbf{p}) \cdot \mathbf{v} \rangle_{f(\mathbf{p})} = \langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle_{\mathbf{p}}, \quad \forall \mathbf{p} \in S_1, \forall \mathbf{u}, \mathbf{v} \in T_{\mathbf{p}}S_1.$$

$$\begin{aligned} f \text{ es isometría} &\iff (I_{S_2})_{f(\mathbf{p})}(Df(\mathbf{p}) \cdot \mathbf{u}) = (I_{S_1})_{\mathbf{p}}(\mathbf{u}), \quad \forall \mathbf{p} \in S_1, \forall \mathbf{u} \in T_{\mathbf{p}}S_1 \\ &\iff Df(\mathbf{p}) : T_{\mathbf{p}}S_1 \rightarrow T_{f(\mathbf{p})}S_2 \text{ es isometría lineal, } \forall \mathbf{u} \in T_{\mathbf{p}}S_1. \end{aligned}$$

Obs! $f : S_1 \rightarrow S_2$ es isometría, entonces las parametrizaciones \mathbf{x} de S_1 y $f \circ \mathbf{x}$ de S_2 , tienen los mismo coeficientes en la 1a. forma fundamental.

$$E_{f \circ \mathbf{x}} = \langle (f \circ \mathbf{x})_u, (f \circ \mathbf{x})_u \rangle_{f(\mathbf{p})} = \langle Df(\mathbf{p}) \cdot \mathbf{x}_u, Df(\mathbf{p}) \cdot \mathbf{x}_u \rangle_{f(\mathbf{p})} = \langle \mathbf{x}_u, \mathbf{x}_u \rangle_{\mathbf{p}} = E_{\mathbf{x}},$$

$$F_{f \circ \mathbf{x}} = \langle (f \circ \mathbf{x})_u, (f \circ \mathbf{x})_v \rangle_{f(\mathbf{p})} = \langle Df(\mathbf{p}) \cdot \mathbf{x}_u, Df(\mathbf{p}) \cdot \mathbf{x}_v \rangle_{f(\mathbf{p})} = \langle \mathbf{x}_u, \mathbf{x}_v \rangle_{\mathbf{p}} = F_{\mathbf{x}},$$

$$G_{f \circ \mathbf{x}} = \langle (f \circ \mathbf{x})_v, (f \circ \mathbf{x})_v \rangle_{f(\mathbf{p})} = \langle Df(\mathbf{p}) \cdot \mathbf{x}_v, Df(\mathbf{p}) \cdot \mathbf{x}_v \rangle_{f(\mathbf{p})} = \langle \mathbf{x}_v, \mathbf{x}_v \rangle_{\mathbf{p}} = G_{\mathbf{x}}.$$

Proposición

Sean $\mathbf{x}_1 : U_1 \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow V_1 \cap S_1$, $\mathbf{x}_2 : U_2 \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow V_2 \cap S_2$ parametrizaciones tales que $E_{\mathbf{x}_1}(u, v) = E_{\mathbf{x}_2}(u, v)$, $F_{\mathbf{x}_1}(u, v) = F_{\mathbf{x}_2}(u, v)$, $G_{\mathbf{x}_1}(u, v) = G_{\mathbf{x}_2}(u, v)$. Entonces, el mapa $f = \mathbf{x}_2 \circ \mathbf{x}_1^{-1}$ es una isometría.

Prueba:

Si $f = \mathbf{x}_2 \circ \mathbf{x}_1^{-1}$, entonces $Df(\mathbf{p}) \cdot \mathbf{x}_{1u} = \mathbf{x}_{2u}$ y $Df(\mathbf{p}) \cdot \mathbf{x}_{1v} = \mathbf{x}_{2v}$, y tenemos que

$$\begin{aligned}\langle Df(\mathbf{p}) \cdot \mathbf{x}_{1u}, Df(\mathbf{p}) \cdot \mathbf{x}_{1u} \rangle_{f(\mathbf{p})} &= \langle \mathbf{x}_{2u}, \mathbf{x}_{2u} \rangle_{f(\mathbf{p})} = E_{\mathbf{x}_2} = E_{\mathbf{x}_1} = \langle \mathbf{x}_{1u}, \mathbf{x}_{1u} \rangle_{\mathbf{p}}, \\ \langle Df(\mathbf{p}) \cdot \mathbf{x}_{1u}, Df(\mathbf{p}) \cdot \mathbf{x}_{1v} \rangle_{f(\mathbf{p})} &= \langle \mathbf{x}_{2u}, \mathbf{x}_{2v} \rangle_{f(\mathbf{p})} = F_{\mathbf{x}_2} = F_{\mathbf{x}_1} = \langle \mathbf{x}_{1u}, \mathbf{x}_{1v} \rangle_{\mathbf{p}}, \\ \langle Df(\mathbf{p}) \cdot \mathbf{x}_{1v}, Df(\mathbf{p}) \cdot \mathbf{x}_{1v} \rangle_{f(\mathbf{p})} &= \langle \mathbf{x}_{2v}, \mathbf{x}_{2v} \rangle_{f(\mathbf{p})} = G_{\mathbf{x}_2} = G_{\mathbf{x}_1} = \langle \mathbf{x}_{1v}, \mathbf{x}_{1v} \rangle_{\mathbf{p}}.\end{aligned}$$

Como $\{\mathbf{x}_{1u}, \mathbf{x}_{1v}\}$ es base de $T_{\mathbf{p}}S_1$ y $\{\mathbf{x}_{2u}, \mathbf{x}_{2v}\}$ es base de $T_{f(\mathbf{p})}S_2$, el resultado se extiende por linealidad a todo vector. Portanto f es isometría. \square

Definición

$f : S_1 \rightarrow S_2$ es una **isometría local** si f es un difeomorfismo local.

Dos superficies son **localmente isométricas** si para todo punto $\mathbf{p} \in S_1$, existe un punto $\mathbf{q} \in S_2$ y vecindades abiertas $U_1 \subseteq S_1$ de \mathbf{p} , $U_2 \subseteq S_2$ de \mathbf{q} , tales que $f|_{U_1} : U_1 \rightarrow U_2$ es una isometría.

Ejemplos

Ejemplo 3:

¿Existe alguna superficie S no contenida en un plano, que se localmente isométrica al plano?

Respuesta: Sí, hay muchas.

Por ejemplo, el cilindro circular recto $S = S^1 \times \mathbb{R}$, parametrizado por

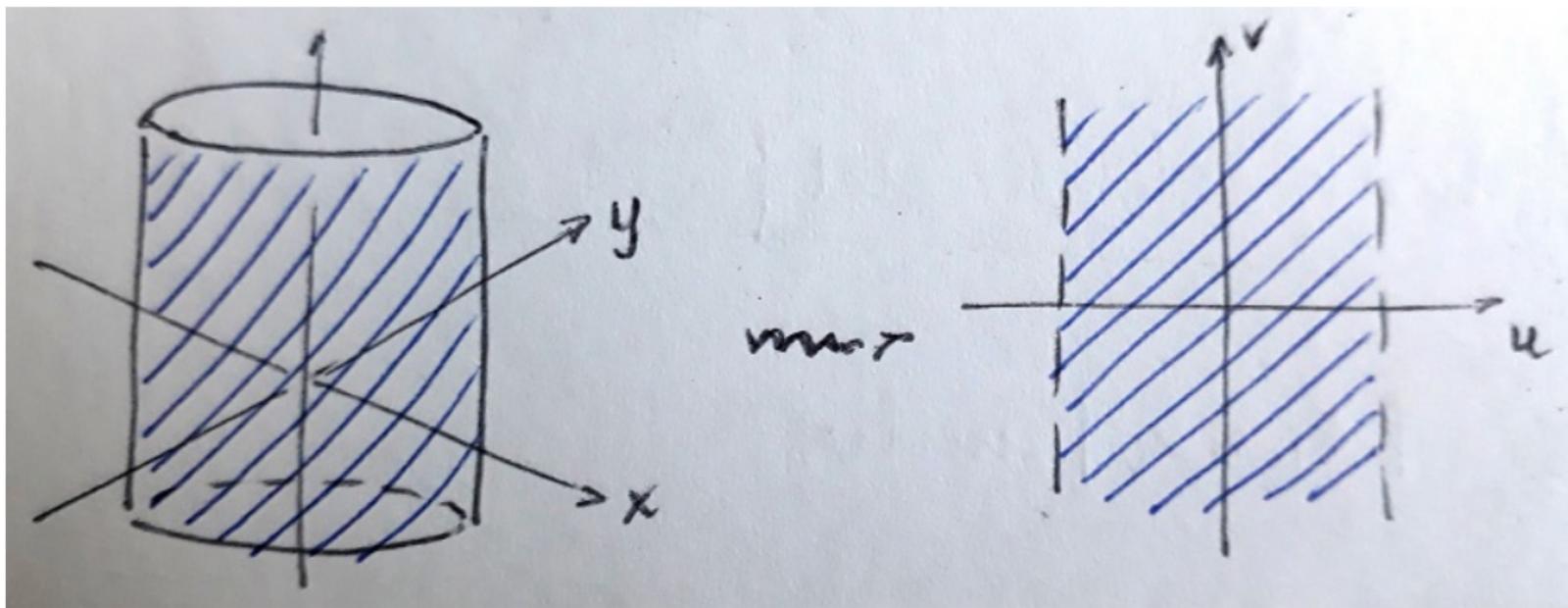
$$\mathbf{x}(u, v) = (\cos u, \sin u, v), \quad u \in (0, 2\pi), v \in \mathbb{R}.$$

Luego, $\mathbf{x}_u = (-\sin u, \cos u, 0)$, $\mathbf{x}_v = (0, 0, 1)$, y

$$E = \langle \mathbf{x}_u, \mathbf{x}_u \rangle = \sin^2 u + \cos^2 u = 1, \quad F = \langle \mathbf{x}_u, \mathbf{x}_v \rangle = 0, \quad G = \langle \mathbf{x}_v, \mathbf{x}_v \rangle = 1.$$

Así, el cilindro satisface $E = 1, F = 0, G = 1, \forall(u, v) \Rightarrow$ tiene la misma 1a. forma fundamental que el plano \mathbb{R}^2 .

Ejemplos



Isometría local entre el cilindro $S^1 \times \mathbb{R}$ y la región $(-\pi, \pi) \times \mathbb{R}$ del plano \mathbb{R}^2 .