

EL PLANO TANGENTE

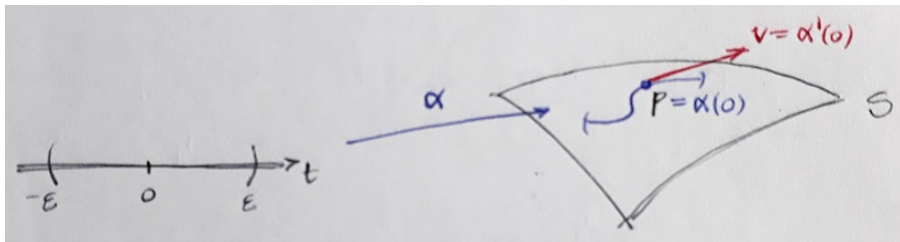
ALAN REYES-FIGUEROA
GEOMETRÍA DIFERENCIAL

(AULA 18) 13.MARZO.2025

El plano tangente

Definición

Sea $S \subseteq \mathbb{R}^3$ una superficie regular. Diremos que el vector $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^3$ es **tangente** a S en el punto $\mathbf{p} \in S$ si existe una curva parametrizada $\alpha : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow S$ tal que $\alpha(0) = \mathbf{p}$ y $\alpha'(0) = \mathbf{v}$.



El plano tangente

Propiedad

Sea $\mathbf{x} : U \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow V \subseteq S$ una parametrización de la superficie regular S , en el punto $\mathbf{p} \in V \cap S$, con $\mathbf{x}(\mathbf{q}) = \mathbf{p}$. Entonces, el conjunto $D\mathbf{x}(\mathbf{q}) \cdot \mathbb{R}^2$ coincide con el conjunto de los vectores tangentes a S en $\mathbf{p}$.

Prueba:

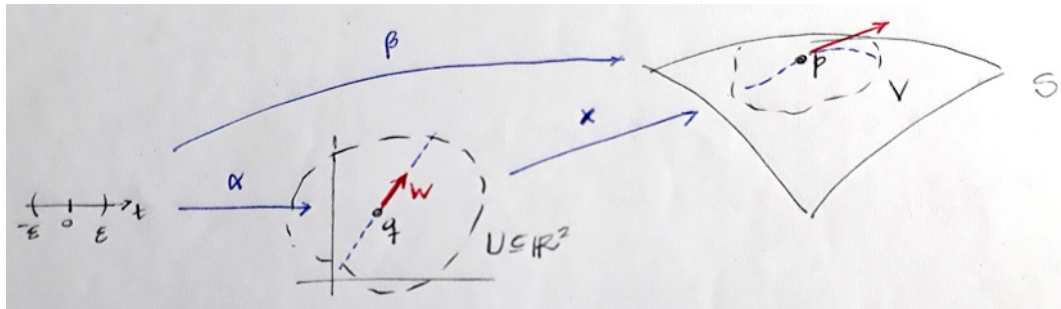
Considere $T_{\mathbf{p}}S = \{\mathbf{v} \in \mathbb{R}^3 : \mathbf{v} \text{ es tangente a } S \text{ en } \mathbf{p}\}$. Mostramos que $D\mathbf{x}(\mathbf{q}) \cdot \mathbb{R}^2 = T_{\mathbf{p}}S$.

$[\subseteq]$ Sea $\mathbf{w} \in \mathbb{R}^2$ y sea $\alpha(t) = \mathbf{q} + t\mathbf{w}$ la recta en dirección de $\mathbf{w}$ pasando por $\mathbf{q}$, dentro del dominio U . Luego, $\alpha(0) = \mathbf{q}$ y $\alpha'(0) = \mathbf{w}$. Definamos la curva $\beta = \mathbf{x} \circ \alpha$ sobre S

Entonces, $\beta(0) = \mathbf{x} \circ \alpha(0) = \mathbf{x}(\mathbf{q}) = \mathbf{p}$, y por la regla de la cadena tenemos

$$\beta'(0) = \frac{d}{dt}(\mathbf{x} \circ \alpha)(0) = D\mathbf{x}(\alpha(0)) \cdot \alpha'(0) = D\mathbf{x}(\mathbf{q}) \cdot \mathbf{w},$$

El plano tangente



de modo que $D\mathbf{x}(q) \cdot \mathbf{w} \in T_p S$.

Como $\mathbf{w}$ es arbitrario, esto muestra que $D\mathbf{x}(q) \cdot \mathbb{R}^2 \subseteq T_p S$.

El plano tangente

[$\supseteq$] Sea $\mathbf{v} \in T_{\mathbf{p}}S$.

Entonces, existe una curva $\beta : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow V \subseteq S$ tal que $\beta(0) = \mathbf{p}$ y $\beta'(0) = \mathbf{v}$.
Definamos $\alpha = \mathbf{x}^{-1} \circ \beta : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow U \subseteq \mathbb{R}^2$. Observe que siendo $\mathbf{x}$ y β diferenciables, entonces α es también diferenciable. Luego, $\alpha(0) = \mathbf{x}^{-1} \circ \beta(0) = \mathbf{x}^{-1}(\mathbf{p}) = \mathbf{q}$ y $\alpha'(0) = \mathbf{w} \in \mathbb{R}^2$.

Como $\mathbf{x} \circ \alpha = \beta$, entonces de la regla de la cadena

$$\mathbf{v} = \beta'(0) = D\mathbf{x}(\alpha(0)) \cdot \alpha'(0) = D\mathbf{x}(\mathbf{q}) \cdot \mathbf{w} \in D\mathbf{x}(\mathbf{q}) \cdot \mathbb{R}^2.$$

Siendo $\mathbf{v}$ arbitrario en $T_{\mathbf{p}}S$, esto muestra que $T_{\mathbf{p}}S \subseteq D\mathbf{x}(\mathbf{q}) \cdot \mathbb{R}^2$, lo que concluye la igualdad. $\square$

Corolario

Para todo punto $\mathbf{p}$ de una superficie regular S , el plano tangente $T_{\mathbf{p}}S$ es un espacio vectorial de dimensión 2. Una base para este espacio es $\{\frac{\partial \mathbf{x}}{\partial u}(\mathbf{p}), \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial v}(\mathbf{p})\}$, donde

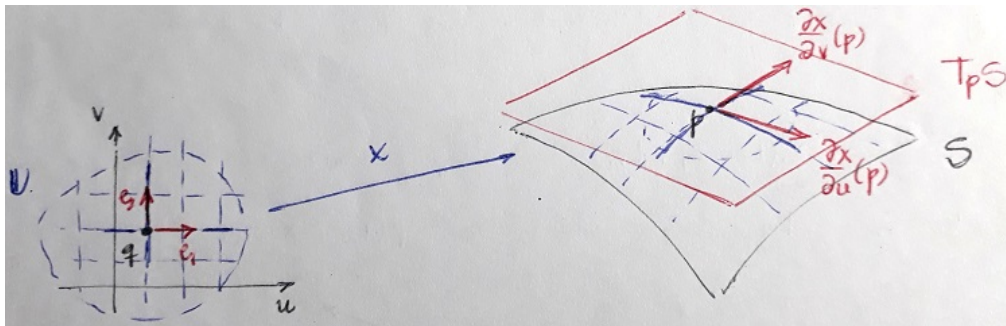
$$\frac{\partial \mathbf{x}}{\partial u}(\mathbf{p}) = D\mathbf{x}(\mathbf{q}) \cdot \mathbf{e}_1, \quad \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial v}(\mathbf{p}) = D\mathbf{x}(\mathbf{q}) \cdot \mathbf{e}_2.$$

Prueba:

- Como S es superficie regular y $\mathbf{x} : U \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow V \cap S$ es una parametrización, la derivada $D\mathbf{x}(\mathbf{q})$ es un mapa lineal inyectivo $\Rightarrow T_{\mathbf{p}}S = \text{Im } D\mathbf{x}(\mathbf{q})$ es un espacio vectorial y $\dim T_{\mathbf{p}}S \geq \dim \mathbb{R}^2 = 2$.
- Por el Teorema de la Dimensión, $\dim T_{\mathbf{p}}S = \dim \mathbb{R}^2 = 2$. Portanto, $\dim T_{\mathbf{p}}S = 2$.

El plano tangente

- Como $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2\}$ es una base de $\mathbb{R}^2$ y $D\mathbf{x}(\mathbf{q}) : \mathbb{R}^2 \rightarrow T_{\mathbf{p}}S$ es un isomorfismo lineal, entonces $\{\frac{\partial \mathbf{x}}{\partial u}(\mathbf{p}), \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial v}(\mathbf{p})\}$ es una base para $T_{\mathbf{p}}S$. $\square$



El plano tangente

Definición

A $T_p S$ se le llama el **plano tangente** a la superficie S en $\mathbf{p}$.

Observaciones:

- La base $\left\{ \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial u}(\mathbf{p}), \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial v}(\mathbf{p}) \right\}$ se llama la **base canónica** o la base de $T_p S$ asociada a la parametrización $\mathbf{x}$.
- Usualmente escribiremos

$$\frac{\partial \mathbf{x}}{\partial u}(\mathbf{p}) = \mathbf{x}_u(\mathbf{q}), \quad \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial v}(\mathbf{p}) = \mathbf{x}_v(\mathbf{q}).$$

- El plano tangente $T_p S$ no depende de la elección de la parametrización $\mathbf{x}$, ni de la curva α .

El plano tangente

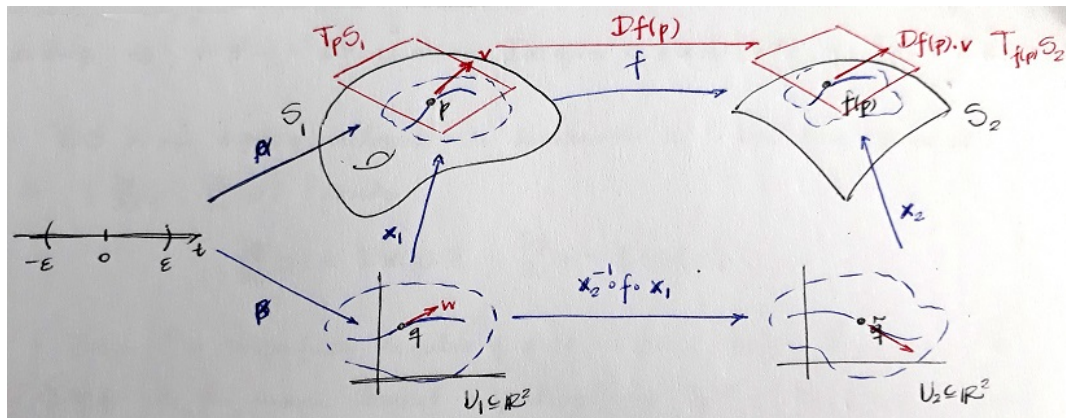
Definición

Sean S_1, S_2 superficies regulares, y sea $f : S_1 \rightarrow S_2$ una aplicación diferenciable. Dados, $\mathbf{p} \in S_1, \mathbf{v} \in T_{\mathbf{p}}S_1$, entonces existe una curva parametrizada $\alpha : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow V \subseteq S_1$, con $\alpha(0) = \mathbf{p}$ y $\alpha'(0) = \mathbf{v}$.

La **derivada** de f en $\mathbf{p}$ es la aplicación lineal $Df(\mathbf{p}) : T_{\mathbf{p}}S_1 \rightarrow T_{f(\mathbf{p})}S_2$ dada por

$$Df(\mathbf{p}) \cdot \mathbf{v} = (f \circ \alpha)'(0).$$

El plano tangente



El plano tangente

Observaciones:

- La regla de la cadena implica que $(f \circ \alpha)'(0) = Df(\alpha(0)) \cdot \alpha'(0) = Df(\mathbf{p}) \cdot \mathbf{v}$.
- La derivada $Df(\mathbf{p})$ no depende de la curva α .
- Si $\mathbf{x} : U_1 \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow S_1$ es una parametrización, y $\mathbf{p} \in \mathbf{x}(U_1)$, definamos $\alpha = \mathbf{x} \circ \beta : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow S_1$ es una curva diferenciable. Suponga que $\beta(t) = (u(t), v(t))$. Entonces,

$$\begin{aligned}\mathbf{v} &= \alpha'(0) = (\mathbf{x} \circ \beta)'(0) = D\mathbf{x}(\beta(0)) \cdot \beta'(0) = D\mathbf{x}(\mathbf{q}) \cdot (u'(0), v'(0)) \\ &= u'(0)D\mathbf{x}(\mathbf{q}) \cdot \mathbf{e}_1 + v'(0)D\mathbf{x}(\mathbf{q}) \cdot \mathbf{e}_2 = u'(0)\frac{\partial \mathbf{x}}{\partial u}(\mathbf{q}) + v'(0)\frac{\partial \mathbf{x}}{\partial v}(\mathbf{q}) \\ &= u'(0)\mathbf{x}_u(\mathbf{q}) + v'(0)\mathbf{x}_v(\mathbf{q}).\end{aligned}$$

El fibrado tangente

Sea $S \subseteq \mathbb{R}^3$ una superficie regular sea $\mathbf{x} : U \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow S$, con U abierto, una carta local de S . Sea $\mathbf{p} \in S$, y sea $T_{\mathbf{p}}S$ el plano tangente a S en $\mathbf{p}$.

Definición

El **fibrado tangente** TS de la superficie S es la unión disjunta de los espacios tangentes $T_{\mathbf{p}}S$ sobre los diferentes puntos $\mathbf{p}$ de la superficie:

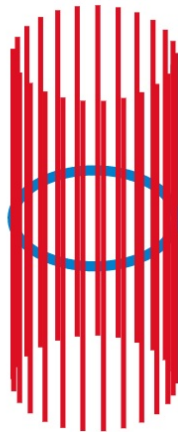
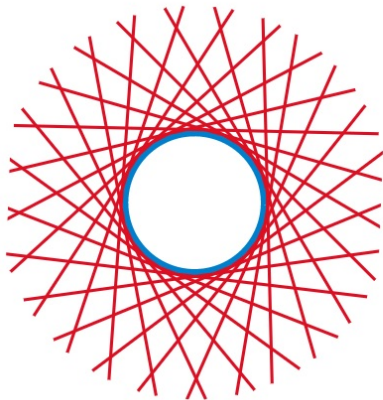
$$TS = \bigsqcup_{\mathbf{p} \in S} T_{\mathbf{p}}S = \bigcup_{\mathbf{p} \in S} \{\mathbf{p}\} \times T_{\mathbf{p}}S.$$

Así, un elemento de TS se puede pensar como un par ordenado $(\mathbf{p}, \mathbf{v})$, donde $\mathbf{p}$ es un punto de S y $\mathbf{v}$ es un vector tangente a S en el punto $\mathbf{p}$. Existe una proyección

$$\pi : TS \twoheadrightarrow S,$$

definida por $\pi(\mathbf{p}, \mathbf{v}) = \mathbf{p}$. Esta proyección colapsa cada espacio tangente $T_{\mathbf{p}}S$ en un único punto $\mathbf{p}$.

El fibrado tangente



El fibrado tangente TS^1 al círculo S^1 .

El fibrado tangente

Observaciones:

- Para una curva C (variedad 1-dimensional), el fibrado tangente TC tiene dimensión 2.
- Mientras que un espacio tangente $T_p S$ tiene dimensión 2, el fibrado tangente TS tiene dimensión 4.
- En general, para una variedad n -dimensional M , su espacio tangente $T_p M$ tiene dimensión n , y su fibrado tangente TM tiene dimensión $2n$.