

FUNCIONES DIFERENCIABLES EN SUPERFICIES

ALAN REYES-FIGUEROA
GEOMETRÍA DIFERENCIAL

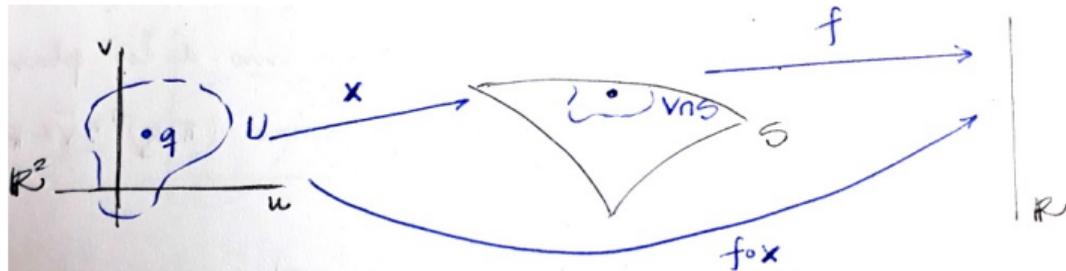
(AULA 17) 11.MARZO.2025

Funciones diferenciables en superficies

Sea $S \subseteq \mathbb{R}^3$ una superficie regular. Queremos definir la noción de diferenciability de una función $f : S \rightarrow \mathbb{R}$.

Definición

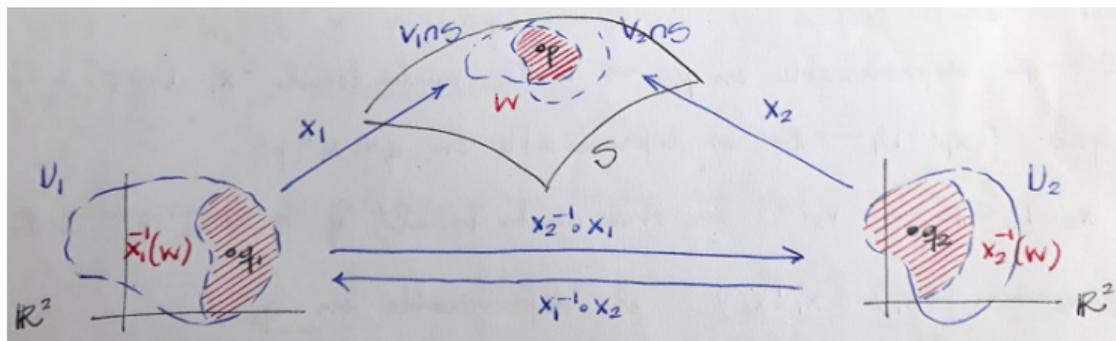
Sea $S \subseteq \mathbb{R}^3$ superficie regular y $f : S \rightarrow \mathbb{R}$ una función. Diremos que f es **diferenciable** en $\mathbf{p} \in S$ si existe una vecindad parametrizada (carta local) $V \subseteq \mathbb{R}^3$ de \mathbf{p} con parametrización $\mathbf{x} : U \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow V$, con $\mathbf{x}(U) = V \cap S$, $\mathbf{x}(\mathbf{q}) = \mathbf{p}$, tal que la composición $f \circ \mathbf{x} : U \rightarrow \mathbb{R}$ es diferenciable en $\mathbf{q} = \mathbf{x}^{-1}(\mathbf{p})$.



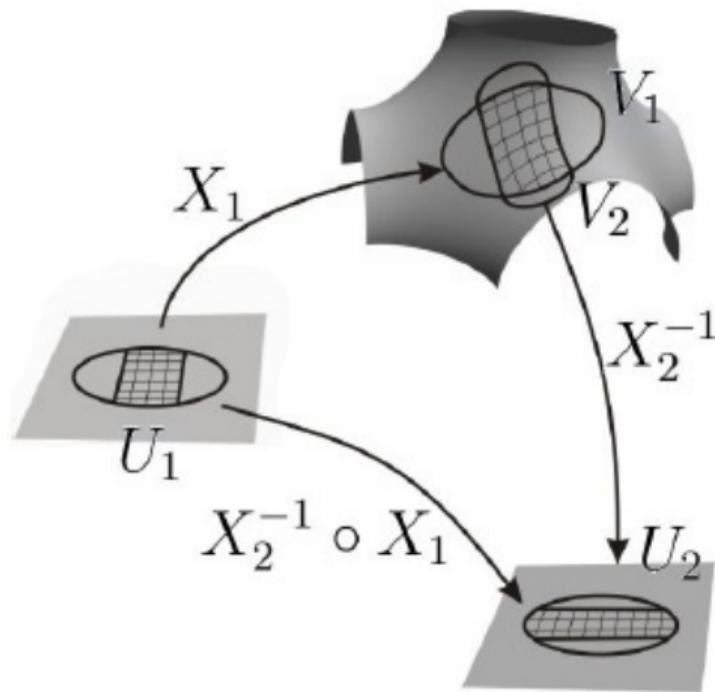
Funciones diferenciables en superficies

Obs! Esta definición tiene un problema natural. ¿Qué sucede si consideramos dos vecindades parametrizadas de \mathbf{p} ? ¿Depende la diferenciabilidad de f de la elección de la carta local?

Sean $V_1, V_2 \subseteq \mathbb{R}^3$ vecindades parametrizadas de \mathbf{p} , con parametrizaciones $\mathbf{x}_1 : U_1 \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow V_1$, $\mathbf{x}_2 : U_2 \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow V_2$ respectivamente, y con $\mathbf{p} \in W = V_1 \cap V_2 \cap S$.



Funciones diferenciables en superficies



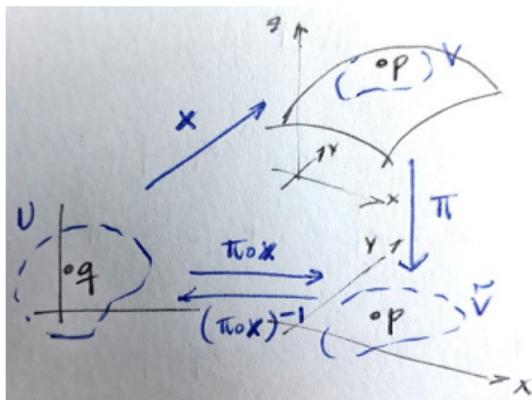
Cambio de coordenadas $\mathbf{x}_2^{-1} \circ \mathbf{x}_1$.

Funciones diferenciables en superficies

Recordemos que si la parametrización $\mathbf{x} : U \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow V$ es de la forma

$$\mathbf{x}(u, v) = (x(u, v), y(u, v), z(u, v)),$$

entonces al menos uno de los números $\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}$, $\frac{\partial(x,z)}{\partial(u,v)}$ ó $\frac{\partial(y,z)}{\partial(u,v)}$ es no nulo. Si asumimos que $\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} \neq 0$, entonces la aplicación $\pi \circ \mathbf{x} : U \rightarrow \mathbb{R}^2$ es un difeomorfismo local, donde $\pi(x, y, z) = (x, y)$.



~~Podemos escribir $\mathbf{x} = (\pi \circ \mathbf{x})^{-1} \circ \pi$ donde $\pi \circ \mathbf{x} : U \rightarrow \mathbb{R}^2$ son funciones diferenciables~~

Proposición (Cambios de coordenadas son difeomorfismos)

Sea $S \subseteq \mathbb{R}^3$ una superficie regular. Dados $\mathbf{p} \in S$, $V_1, V_2 \subseteq \mathbb{R}^3$ vecindades de \mathbf{p} , y parametrizaciones $\mathbf{x}_1 : U_1 \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow V_1$, $\mathbf{x}_2 : U_2 \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow V_2$, con $\mathbf{p} \in W = V_1 \cap V_2 \cap S$, la aplicación

$$\mathbf{x}_2^{-1} \circ \mathbf{x}_1|_{\mathbf{x}_1^{-1}(W)} : \mathbf{x}_1^{-1}(W) \rightarrow \mathbf{x}_2^{-1}(W)$$

es un difeomorfismo.

Prueba:

Consideremos $\pi : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ la proyección sobre uno de los planos coordenados (e.g. $\pi(x, y, z) = (x, y)$). Entonces, la aplicación

$$(\pi \circ \mathbf{x}_2)^{-1} : \pi(V_2) \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow U_2 \subseteq \mathbb{R}^2$$

es diferenciable,

Funciones diferenciables en superficies

y podemos escribir

$$\mathbf{x}_2^{-1} \circ \mathbf{x}_1 = \mathbf{x}_2^{-1} \circ \pi^{-1} \circ \pi \circ \mathbf{x}_1 = (\pi \circ \mathbf{x}_2)^{-1} \circ (\pi \circ \mathbf{x}_1),$$

la cual es una función diferenciable.

Lo mismo puede hacerse para mostrar que $\mathbf{x}_1^{-1} \circ \mathbf{x}_2 = (\pi \circ \mathbf{x}_1)^{-1} \circ (\pi \circ \mathbf{x}_2)$ es diferenciable. De ahí que $\mathbf{x}_2^{-1} \circ \mathbf{x}_1$ es un difeomorfismo de $\mathbf{x}_1^{-1}(W)$ a $\mathbf{x}_2^{-1}(W)$. \square

Funciones diferenciables en superficies

Una consecuencia de la propiedad anterior es que la diferenciabilidad de una función $f : S \rightarrow \mathbb{R}$ en el punto \mathbf{p} depende de la carta local:

- Si $f : S \rightarrow \mathbb{R}$ es diferenciable en $\mathbf{p} \Rightarrow$ existe una carta local $\mathbf{x}_1 : U_1 \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow V_1 \cap S$ tal que $f \circ \mathbf{x}_1 : U_1 \rightarrow \mathbb{R}$ es diferenciable en $\mathbf{q}_1 = \mathbf{x}_1^{-1}(\mathbf{p})$.
- Si $\mathbf{x}_2 : U_2 \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow V_2 \cap S$ es otra carta local, y $\mathbf{q}_2 = \mathbf{x}_2^{-1}(\mathbf{p})$, entonces, si $W = V_1 \cap V_2 \cap S$

$$f \circ \mathbf{x}_2|_{\mathbf{x}_2^{-1}(W)} = (f \circ \mathbf{x}_1) \circ (\mathbf{x}_1^{-1} \circ \mathbf{x}_2)|_{\mathbf{x}_2^{-1}(W)} = \underbrace{(f \circ \mathbf{x}_1)|_{\mathbf{x}_1^{-1}(W)}}_{\text{dif. en } \mathbf{q}_1} \circ \underbrace{(\mathbf{x}_1^{-1} \circ \mathbf{x}_2)|_{\mathbf{x}_2^{-1}(W)}}_{\text{dif. en } \mathbf{q}_2}$$

es composición de aplicaciones diferenciables.

- Luego, $f \circ \mathbf{x}_2$ es diferenciable en $\mathbf{q}_2 = \mathbf{x}_2^{-1}(\mathbf{p})$.

Funciones diferenciables en superficies

Esto nos lleva a una definición alternativa de diferenciability.

Definición

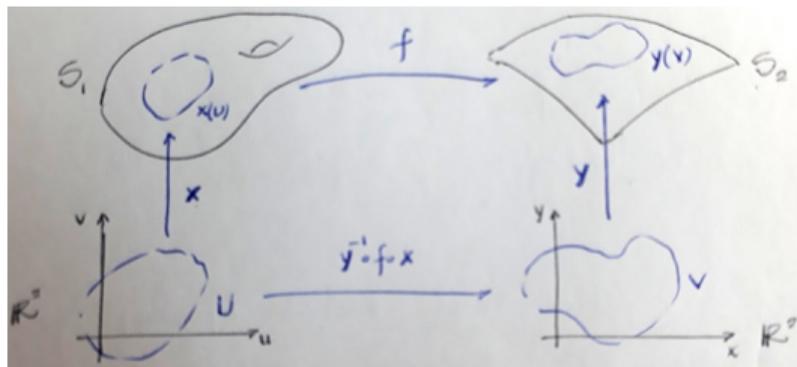
Sea $S \subseteq \mathbb{R}^3$ superficie regular. Decimos que la función $f : S \rightarrow \mathbb{R}$ es **diferenciable** en un abierto $V \subseteq S$, si $f \circ \mathbf{x}$ es diferenciable (como aplicación entre espacios \mathbb{R}^d) para cualquier parametrización $\mathbf{x} : U \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow V$ de V .

Funciones diferenciables en superficies

Consideramos ahora funciones entre dos superficies S_1 y S_2 .

Definición

Sea $f : S_1 \rightarrow S_2$ una aplicación entre superficies regulares S_1 y S_2 . Diremos que f es **diferenciable** si para cualesquiera parametrizaciones $\mathbf{x} : U \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow S_1$ y $\mathbf{y} : V \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow S_2$, con $f \circ \mathbf{x}(U) \subseteq \mathbf{y}(V)$, se tiene que la aplicación $\mathbf{y}^{-1} \circ f \circ \mathbf{x} : U \rightarrow V$ es diferenciable.



Ejemplos

1. Restricciones:

Sea $f : V \subseteq \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ una función diferenciable. Si $S \subseteq V$ es una superficie regular, entonces $f|_S : S \rightarrow \mathbb{R}$ es diferenciable.

En general, si $F : V_1 \subseteq \mathbb{R}^3 \rightarrow V_2 \subseteq \mathbb{R}^3$ es diferenciable, y $S_1 \subseteq V_1$, $S_2 \subseteq V_2$ son superficies regulares, con $F(S_1) \subseteq S_2$, entonces $F|_{S_1} : S_1 \rightarrow S_2$ es diferenciable.

Ejemplo:

Sea $S \subseteq \mathbb{R}^3$ una superficie. Denotemos por $h : S \rightarrow \mathbb{R}$ a la función de altura relativa a un vector unitario $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^3$,

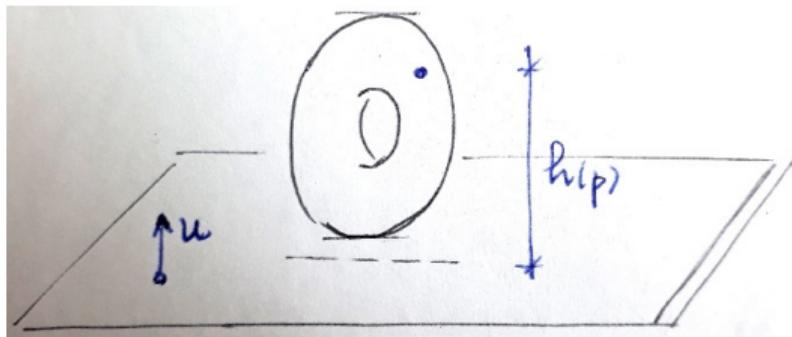
$$h(\mathbf{p}) = \mathbf{u} \cdot \mathbf{p}, \quad \forall \mathbf{p} \in S.$$

Ejemplos

Claramente, la aplicación $h : S \rightarrow \mathbb{R}$ es la restricción de una aplicación diferenciable

$$h : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}, \quad h(\mathbf{p}) = \mathbf{u} \cdot \mathbf{p} = \mathbf{u}^T \mathbf{p},$$

y por lo tanto es diferenciable.



¿Cuál es la derivada $Dh(\mathbf{p})$? Respuesta: $Dh(\mathbf{p}) = \mathbf{u}, \forall \mathbf{p} \in S$.

Ejemplos

Ejemplo: Sea $S \subseteq \mathbb{R}^3$ una superficie, y sea $\mathbf{p}_0 \in \mathbb{R}^3$ un punto fijo. Denotemos por $d : S \rightarrow \mathbb{R}$ a la función de distancia al cuadrado desde cualquier punto de la superficie a este punto fijo:

$$d(\mathbf{p}) = \|\mathbf{p} - \mathbf{p}_0\|^2, \quad \forall \mathbf{p} \in S.$$

De nuevo, $d : S \rightarrow \mathbb{R}$ es la restricción de una aplicación diferenciable

$$d : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}, \quad d(\mathbf{p}) = \|\mathbf{p} - \mathbf{p}_0\|^2 = (\mathbf{p} - \mathbf{p}_0)^T (\mathbf{p} - \mathbf{p}_0),$$

y por lo tanto es diferenciable.

¿Cuál es la derivada $Dd(\mathbf{p})$?

$$d(\mathbf{p}) = \mathbf{p}^T \mathbf{p} - 2\mathbf{p}_0^T \mathbf{p} + \mathbf{p}_0^T \mathbf{p}_0 \Rightarrow Dd(\mathbf{p}) = 2\mathbf{p} - 2\mathbf{p}_0 = 2(\mathbf{p} - \mathbf{p}_0).$$

2. Inversa de una parametrización:

Sea $S \subseteq \mathbb{R}^3$ superficie regular, y $\mathbf{x} : U \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow S$ una parametrización.

Si $\mathbf{p} \in \mathbf{x}(U) \subseteq S$ es un punto sobre la superficie y $\mathbf{y} : V \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow S$ es cualquier otra parametrización, entonces

$$\mathbf{x}^{-1} \circ \mathbf{y}|_{\mathbf{y}^{-1}(W)} : \mathbf{y}^{-1}(W) \rightarrow \mathbf{x}^{-1}(W), \quad \text{con } W = \mathbf{x}(U) \cap \mathbf{y}(V)$$

es un difeomorfismo.

Luego, $\mathbf{x}^{-1}(W)$ y W son difeomorfos. En particular, la aplicación $\mathbf{x}^{-1} : W \rightarrow \mathbf{x}^{-1}(W)$ es diferenciable.

3. Restricciones dobles:

Sean $S_1, S_2 \subseteq \mathbb{R}^3$ superficies regulares. Suponga que $S_1 \subseteq V \subseteq \mathbb{R}^3$, con V un abierto, y $\varphi : V \rightarrow \mathbb{R}^3$ es una función diferenciable tal que $\varphi(S_1) \subseteq S_2$.

Entonces, la restricción $\varphi|_{S_1} : S_1 \rightarrow S_2$ es un mapa diferenciable entre superficies.

De hecho, si $\mathbf{p} \in S_1$ y $\mathbf{x}_1 : U_1 \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow S_1$, $\mathbf{x}_2 : U_2 \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow S_2$ son parametrizaciones locales de \mathbf{p} y $\varphi(\mathbf{p})$, respectivamente, entonces

$$\mathbf{x}_2^{-1} \circ \varphi \circ \mathbf{x}_1 : U_1 \rightarrow U_2$$

es diferenciable.

Ejemplo: $S \subseteq \mathbb{R}^3$ simétrica respecto del plano xy , i.e. $(x, y, z) \in S \Rightarrow (x, y, -z) \in S$.

El mapa $\varphi : S \rightarrow S$ dado por $\varphi(x, y, z) = (x, y, -z)$ es diferenciable.

Propiedad

Sean $S_1, S_2, S_3 \subseteq \mathbb{R}^3$ superficies regulares. Si, $f : S_1 \rightarrow S_2$ y $g : S_2 \rightarrow S_3$ son diferenciables, entonces $g \circ f : S_1 \rightarrow S_3$ son diferenciables.

Prueba: Ejercicio!

Definición

Dos superficies regulares S_1 y S_2 en \mathbb{R}^3 son **difeomorfas** si existe una aplicación biyectiva diferenciable $\varphi : S_1 \rightarrow S_2$, con inversa $\varphi^{-1} : S_2 \rightarrow S_1$ también diferenciable.

En ese caso, la función φ se llama un **difeomorfismo** entre superficies, y escribimos $S_1 \simeq S_2$.

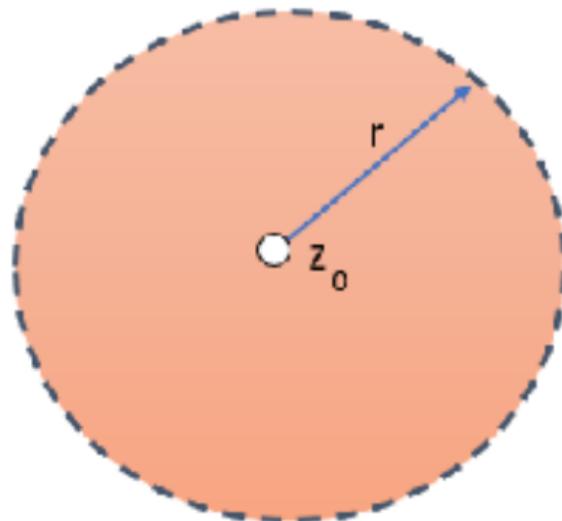
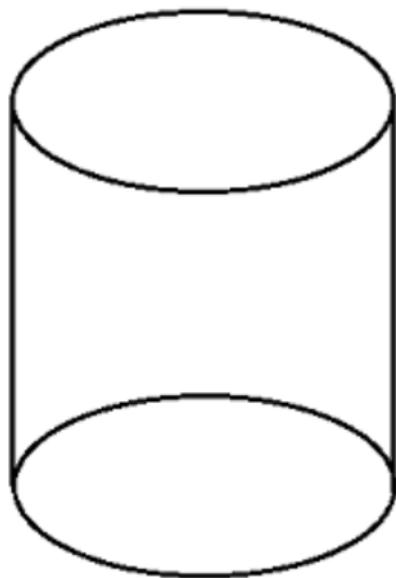
Obs! Puedes trasladar la estructura diferencial de una a la otra.

Desde el punto de vista de la geometría diferencial, dos superficies difeomorfas son indistinguibles.

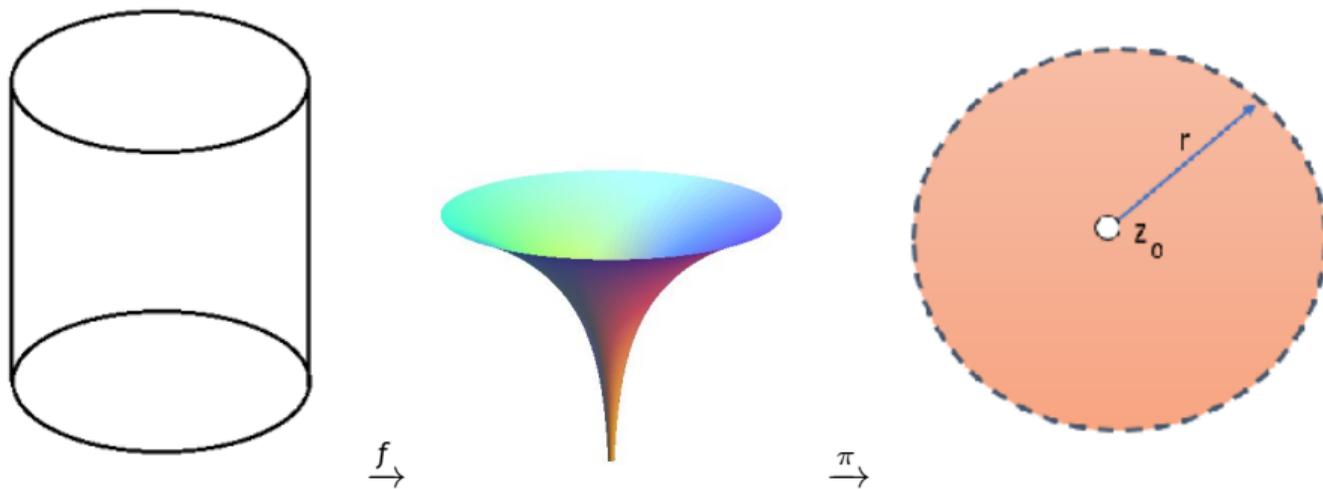
Ejemplos

Ejemplo:

El cilindro $S^1 \times \mathbb{R}$ es difeomorfo al plano puncturado $\mathbb{R}^{2*} = \mathbb{R}^2 - \{(0, 0)\}$.



Ejercicio



Considerar la composición de los mapas

$$f : (\cos u, \sin u, v) \rightarrow (e^v \cos u, e^v \sin u, v) \quad \text{y} \quad \pi : (x, y, z) \rightarrow (x, y)$$