Valores Regulares de Funciones Diferenciables

Alan Reyes-Figueroa

Geometría Diferencial (Aula 16) 04.marzo.2025

Puntos y valores regulares

Definición

Dada una función diferenciable $F : U \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, U abierto, decimos que $\mathbf{p} \in U$ es un ***punto crítico*** *de F si la derivada $DF(\mathbf{p}) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ no es sobreyectiva.*
La imagen $F(\mathbf{p}) \in \mathbb{R}^m$ de un punto crítico se llama un ***valor crítico*** *de F. Un punto $\mathbf{q} \in \mathbb{R}^m$ que no es un valor crítico se llama un* ***valor regular*** *de F.*

Obs: En el caso que $F : U \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $\mathbf{p} \in U$ es un punto crítico de F si $DF(\mathbf{p}) = \mathbf{0}$ (la terminología coincide con la de cálculo).

En este caso, como

$$DF(\mathbf{p}) = \begin{pmatrix} \frac{\partial F}{\partial x_1}(\mathbf{p}) & \frac{\partial F}{\partial x_2}(\mathbf{p}) & \cdots & \frac{\partial F}{\partial x_n}(\mathbf{p}) \end{pmatrix},$$

decir que $DF(\mathbf{p})$ no es sobreyectiva implica que $\frac{\partial F}{\partial x_i}(\mathbf{p}) = 0$, $\forall i$.

Valores regulares

Portanto, para $\mathbf{q} \in F(U)$, decir que $\mathbf{q}$ es un valor regular de F es equivalente a decir que las derivadas

$$\tfrac{\partial F}{\partial x_1}(\mathbf{p}), \tfrac{\partial F}{\partial x_2}(\mathbf{p}), \dots, \tfrac{\partial F}{\partial x_n}(\mathbf{p}),$$

no se anulan simultáneamente en cualquier punto de la imagen inversa

$$F^{-1}(\mathbf{q}) = \{(x_1, x_2, \dots, x_n) \in U \subset \mathbb{R}^n : \ F(x_1, x_2, \dots, x_n) = \mathbf{q}\}.$$

En el caso de funciones en $\mathbb{R}^3$, $f :\subseteq \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, basta verificar que las derivadas

$$\tfrac{\partial f}{\partial x}(\mathbf{p}), \tfrac{\partial f}{\partial y}(\mathbf{p}), \tfrac{\partial f}{\partial z}(\mathbf{p}),$$

nunca se anulan en $\mathbf{p} \in f^{-1}(\mathbf{q})$.

Proposición

Sea $f : U \subseteq \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ una función diferenciable y sea $a \in f(U)$ un valor regular de f. Entonces, $S = f^{-1}(a)$ es una superficie regular.

<u>Prueba</u>:
Sea $\mathbf{p} \in f^{-1}(a)$. Entonces, $Df(\mathbf{p}) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}(\mathbf{p}) \quad \frac{\partial f}{\partial y}(\mathbf{p}) \quad \frac{\partial f}{\partial z}(\mathbf{p})\right) \neq \mathbf{0}$.
Sin pérdida, podemos asumir que $\frac{\partial f}{\partial z}(\mathbf{p}) \neq 0$.

Definimos la función $F : U \subseteq \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ por

$$F(x, y, z) = \big(x, y, f(x, y, z)\big).$$

Claramente, F es diferenciable (pues f lo es), y su derivada está dada por

Valores regulares

$$DF(x,y,z) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{\partial f}{\partial x}(\mathbf{p}) & \frac{\partial f}{\partial y}(\mathbf{p}) & \frac{\partial f}{\partial z}(\mathbf{p}) \end{pmatrix}.$$

Luego, $\det Df(\mathbf{p}) = \frac{\partial f}{\partial z}(\mathbf{p}) \neq 0$. Por lo tanto, $DF(\mathbf{p})$ es un isomorfismo.

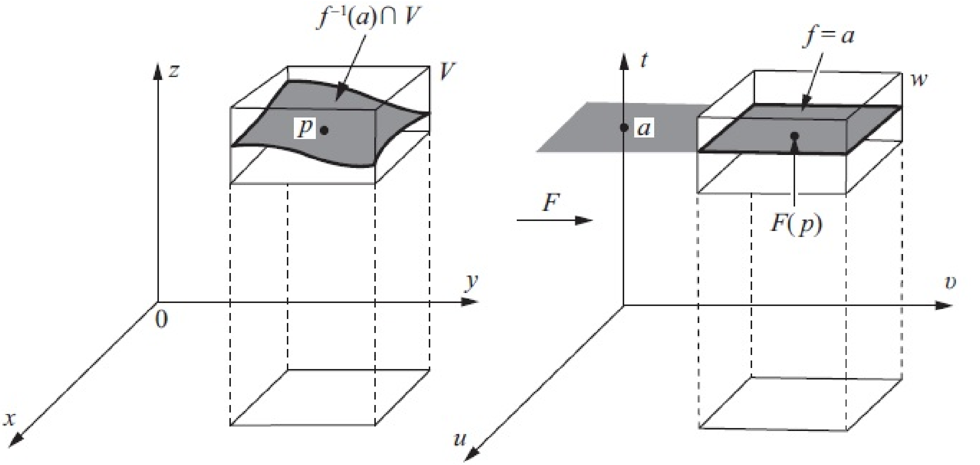
Por el Teorema de la Función Inversa, existen vecindades $V \subseteq U$ de $\mathbf{p}$ y $W \subseteq F(U)$ de $F(\mathbf{p})$, tales que $F\big|_V : V \to W = F(V)$ es un difeomorfismo.

La función inversa $F^{-1} : W \to V$ tiene coordenadas

$$F^{-1}(u,v,w) = \big(u, v, g(u,v,w)\big).$$

Esto es $x = u$, $y = v$ y $z = g(u,v,w)$, para todo $(u,v,w) \in W$.

Valores regulares



Valores regulares

De nuevo denotemos por $\pi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ la proyección $\pi(x, y, z) = (x, y)$.

Definamos la función $h : \pi(V) \to \mathbb{R}$ por

$$h(x, y) = z = g(u, v, w) = g(x, y, a) = z\big(F^{-1}(x, y, a)\big),$$

donde $F^{-1}(x, y, a) = (x, y, f^{-1}(a))$.

Como $F(f^{-1}(a) \cap V) = W \cap \{(u, v, w) : \ w = a\}$, concluímos que
$G_h = \{(x, y, g(x, y, a))\} = f^{-1}(a) \cap V$.

Así, $f^{-1}(a) \cap V$ es una vecindad coordenada de **p**, y como $f^{-1}(a)$ puede cubrirse por cartas locales, esto muestra que $S^{-1}(a)$ es superficie regular.

Ejemplos

1. Esfera:
La esfera $S^2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$ es una superficie regular.

Considere la función $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - 1$.
Observe que 0 es un valor regular de f.

2. Toro $\mathbb{T}^2$:
El toro bidimensional $\mathbb{T}^2$ satisface la ecuación

$$z^2 = r^2 - (\sqrt{x^2 + y^2} - R)^2.$$

Haciendo $f(x, y, z) = z^2 + (\sqrt{x^2 + y^2} - R)^2 - r^2$, se puede observar que 0 es un valor regular de f.