Ejemplos de Superficies Regulares

Alan Reyes-Figueroa
Geometría Diferencial (Aula 14) 27.febrero.2025

1. El plano $\mathbb{R}^2$:

Sea $\mathbf{p} \in \mathbb{R}^3$, y sean $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathbb{R}^3$ vectores linealmente independientes. Considere el plano en $\mathbb{R}^3$ dado por

$$S = \{\mathbf{p} + s\mathbf{a} + t\mathbf{b} : \; s, t \in \mathbb{R}\}.$$

Afirmamos que S es superficie regular. Observe que en este caso, tenemos una parametrización $\mathbf{x} : \mathbb{R}^2 \to S$ dada por

$$\mathbf{x}(u, v) = \mathbf{p} + u\mathbf{a} + v\mathbf{b}.$$

En coordenadas, si $\mathbf{p} = (p_1, p_2, p_3)$, $\mathbf{a} = (a_1, a_2, a_3)$, $\mathbf{b} = (b_1, b_2, b_3)$, entonces

$$\mathbf{x}(u, v) = \big(p_1 + ua_1 + vb_1, p_2 + ua_2 + vb_2, p_3 + ua_3 + vb_3\big).$$

Ejemplos

Claramente $\mathbf{x}$ es diferenciable, $\mathbf{x}$ es un homeomorfismo de $\mathbb{R}^2$ a S y

$$D\mathbf{x}(u,v) = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{a} & \mathbf{b} \end{pmatrix}, \quad \forall (u,v).$$

es inyectiva (¿por qué?).

Ejemplos

2. Abiertos de $\mathbb{R}^2$:
Sea $U \subseteq \mathbb{R}^2$ un conjunto abierto. Entonces, U es una superficie regular.

En este caso, tenemos la parametrización $\mathbf{x} : U \to U \subset \mathbb{R}^3$ dada por

$$\mathbf{x}(u, v) = (u, v, 0).$$

La función identidad, o más bien, la inclusión canónica de U en $\mathbb{R}^3$.
En particular, $\mathbf{x}$ es un homeomorfismo, $\mathbf{x}$ es diferenciable, y la derivada es

$$D\mathbf{x}(u, v) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \forall (u, v) \in U$$

es inyectiva.

Ejemplos

3. La esfera S^2:
Vamos a mostrar que la esfera unitaria

$$S^2 = \{(x, y, z \in \mathbb{R}^3 : \; x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$$

es una superficie regular.

Verificamos primero que el mapa $\mathbf{x}_1 : \mathbb{D} \to \mathbb{R}^3$ dado por

$$\mathbf{x}_1(u, v) = \big(u, v, \sqrt{1 - u^2 - v^2}\big), \quad (u, v) \in \mathbb{D}$$

es una parametrización local del S^2, con $\mathbb{D} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 < 1\}$. Observemos que $\mathbf{x}_1(\mathbb{D}) = S^2 \cap \{z > 0\}$ es el hemisferio superior de la esfera.

Como $x^2 + y^2 < 1$, la función $\sqrt{1 - x^2 - y^2}$ tiene derivadas parciales

$$\frac{\partial}{\partial x} = \frac{-x}{\sqrt{1 - (x^2 + y^2)}}, \qquad \frac{\partial}{\partial y} = \frac{-y}{\sqrt{1 - (x^2 + y^2)}}.$$

continuas, y de clase C^∞. Luego, $\mathbf{x}_1$ es diferenciable.

Para ver que $\mathbf{x}_1$ es un homeomorfismo, observe que $\mathbf{x}_1$ es biyectiva y que la inversa $\mathbf{x}_1^{-1} : S^2 \cap \{z > 0\} \to \mathbb{D}$ es la restricción de la proyección $\pi_{12}(x, y, z) = (x, y)$ al conjunto $\mathbf{x}_1(\mathbb{D})$. Luego, $\mathbf{x}_1^{-1}$ es continua y $\mathbf{x}_1$ es homeomorfismo.

Finalmente, la derivada

$$D\mathbf{x}_1(u, v) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ \dfrac{-u}{\sqrt{1-(u^2+v^2)}} & \dfrac{-v}{\sqrt{1-(u^2+v^2)}} \end{pmatrix}, \quad \text{con menor } \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} = 1,$$

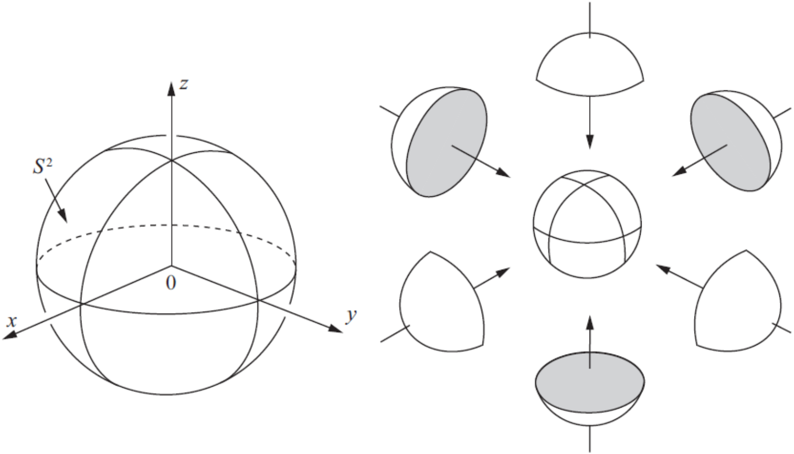
es inyectiva.

Cubrimos ahora la esfera S^2 con parametrizaciones similares:

$$\begin{aligned}
\mathbf{x}_2(u,v) &= (u, v, -\sqrt{1-u^2-v^2}), \quad (u,v) \in \mathbb{D} \\
\mathbf{x}_3(u,v) &= (u, \sqrt{1-u^2-v^2}, v), \quad (u,v) \in \mathbb{D} \\
\mathbf{x}_4(u,v) &= (u, -\sqrt{1-u^2-v^2}, v), \quad (u,v) \in \mathbb{D} \\
\mathbf{x}_5(u,v) &= (\sqrt{1-u^2-v^2}, u, v), \quad (u,v) \in \mathbb{D} \\
\mathbf{x}_6(u,v) &= (-\sqrt{1-u^2-v^2}, u, v), \quad (u,v) \in \mathbb{D}.
\end{aligned}$$

Que, junto con $\mathbf{x}_1$, cubren toda la esfera S^2. De ahí, S^2 es una superficire regular, (cubierta por seis cartas locales).

Ejemplos



Una parametrización de S^2 por cartas locales.

4. Gráficas de funciones

Sea $f : U \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ una función diferenciable. Consideramos la parametrización $\mathbf{x} : U \to \mathbb{R}^3$ dada por

$$\mathbf{x}(u,v) = \big(u, v, f(u,v)\big).$$

Claramente, **x** es diferenciable ya que f es diferenciable. La imagen de **x** es el grafo

$$G_f = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : (x,y) \in U,\ z = f(x,y)\}.$$

Observe que **x** es una función biyectiva, y con inversa $\mathbf{x}^{-1}(x,y,z) = (x,y)$ igual a la restricción de la proyección $\pi_{12}(x,y,z) = (x,y)$ al abierto U, de modo que $\mathbf{x}^{-1}$ también es continua, y portanto un homeomoerfismo.

Superficies

Además, la derivada de **x** está dada por

$$D\mathbf{x}(u,v) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ \frac{\partial f}{\partial u}(u,v) & \frac{\partial f}{\partial v}(u,v) \end{pmatrix}.$$

Esta es inyectiva, ya que el menor $\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} = 1$.
Esto muestra que toda gráfica de una función diferenciable, en un dominio abierto $U \subseteq \mathbb{R}^2$ es una superficie regular.

Obs! Gráficas de funciones del tipo $(x, g(x,z), z)$ ó $(h(y,z), y, z)$ también son superficies regulares.

La recíproca del ejemlo anterior también vale cuando es analizada desde el punto de vista local.