

SUPERFICIES REGULARES

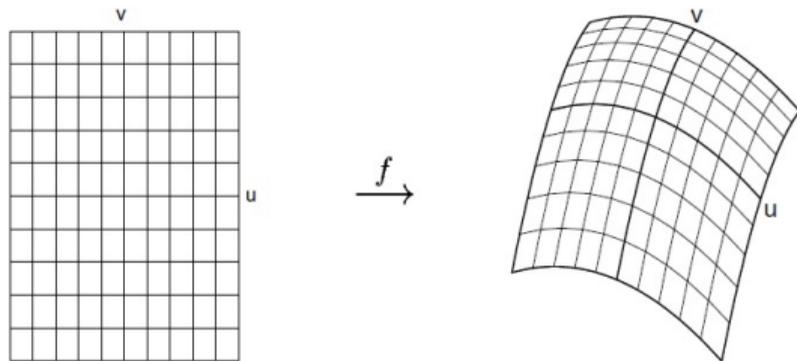
ALAN REYES-FIGUEROA
GEOMETRÍA DIFERENCIAL

(AULA 13) 20.FEBRERO.2025

Superficies

Pasar de curvas a superficies, en principio sólo reemplazamos el parámetro de la curva por dos parámetros independientes (superficie parametrizada).

Para un desarrollo adecuado de la teoría requerimos que la superficie no sólo está dada por un mapa diferenciable en dos variables, sino que además admite una linealización geométrica (hay plano tangente en cada punto).



Definición

Un subconjunto $S \subset \mathbb{R}^3$ es una **superficie regular** si para cada punto $\mathbf{p} \in S$, existe una vecindad $V \subset \mathbb{R}^3$ de \mathbf{p} y una aplicación diferenciable (de clase C^k) $\mathbf{x} : U \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow V \cap S$, definida en un abierto U de \mathbb{R}^2 tal que

- \mathbf{x} es diferenciable (de clase C^k), esto es, si

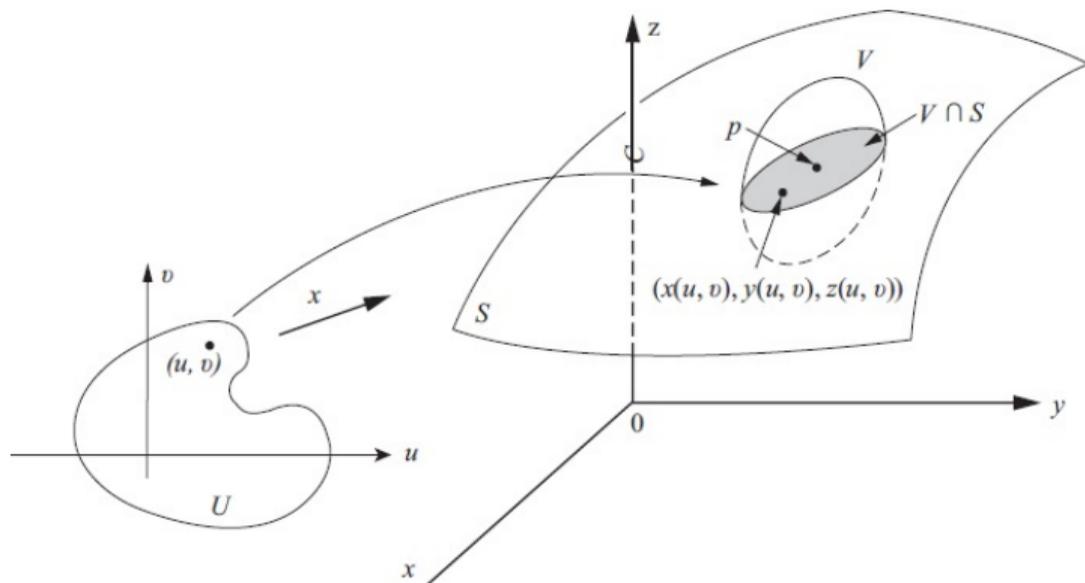
$$\mathbf{x}(u, v) = (x(u, v), y(u, v), z(u, v)),$$

entonces las funciones componentes x, y, z son todas diferenciables de clase C^k en U .

- \mathbf{x} es un homeomorfismo, esto es, \mathbf{x} es continua con inversa $\mathbf{x}^{-1} : V \cap S \rightarrow U$ continua.
- (Condición de regularidad) Para todo $\mathbf{q} \in U$, la derivada $D\mathbf{x}(\mathbf{q}) : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ es inyectiva.

Superficies

La aplicación \mathbf{x} se llama una **parametrización** (o un *sistema de coordenadas locales*, o una *carta local*) en una vecindad de \mathbf{p} . La vecindad $V \cap S$ de \mathbf{p} se llama una **vecindad coordenada**.



Superficies

Expresamos la aplicación lineal $D\mathbf{x}(\mathbf{q}) : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$, en términos de las bases canónicas $\mathbf{e}_1 = (1, 0)$, $\mathbf{e}_2 = (0, 1)$ de \mathbb{R}^2 y $\mathbf{e}_1 = (1, 0, 0)$, $\mathbf{e}_2 = (0, 1, 0)$, $\mathbf{e}_3 = (0, 0, 1)$ de \mathbb{R}^3 .

Sea $\mathbf{q} = (u_0, v_0) \in U$. El vector $\mathbf{e}_1 = (1, 0)$ es tangente a la curva $\alpha : u \rightarrow (u, v_0)$ que pasa por \mathbf{q} . Similarmente el vector $\mathbf{e}_2 = (0, 1)$ es tangente a la curva $\beta : v \rightarrow (u_0, v)$ por \mathbf{q} .

La imagen de la curva α bajo la parametrización \mathbf{x} está sobre la superficie S :

$$\mathbf{x} \circ \alpha : u \rightarrow (x(u, v_0), y(u, v_0), z(u, v_0)).$$

y tiene en $\mathbf{p} = \mathbf{x}(\mathbf{q})$ el vector tangente

$$\mathbf{x}_u = \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial u} = \left(\frac{\partial x}{\partial u}, \frac{\partial y}{\partial u}, \frac{\partial z}{\partial u} \right).$$

Superficies

De hecho, de la definición de derivada, se tiene

$$D\mathbf{x}(\mathbf{q}) \cdot \mathbf{e}_1 = \left(\frac{\partial x}{\partial u}, \frac{\partial y}{\partial u}, \frac{\partial z}{\partial u} \right) = \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial u} = \mathbf{x}_u.$$

De la misma forma, la imagen de la curva β bajo la parametrización \mathbf{x} está sobre la superficie S :

$$\mathbf{x} \circ \beta : v \rightarrow (\mathbf{x}(u_0, v), y(u_0, v), z(u_0, v)).$$

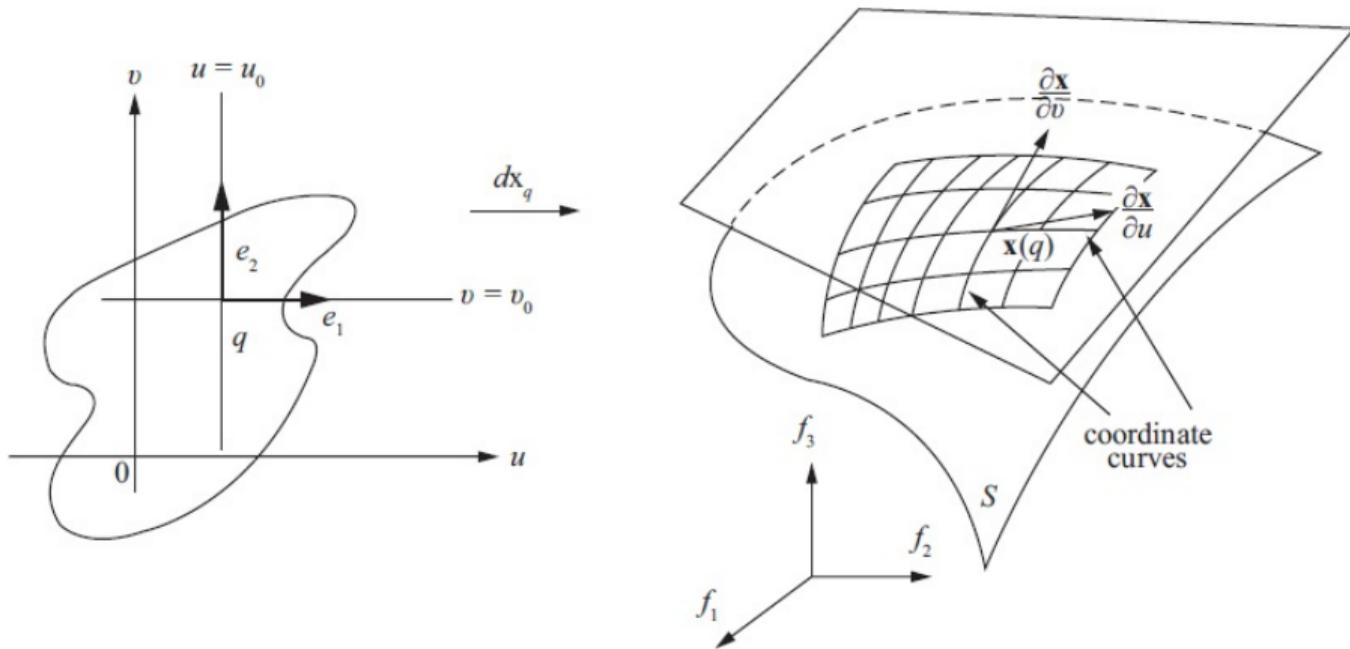
y tiene en $\mathbf{p} = \mathbf{x}(\mathbf{q})$ el vector tangente

$$\mathbf{x}_v = \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial v} = \left(\frac{\partial x}{\partial v}, \frac{\partial y}{\partial v}, \frac{\partial z}{\partial v} \right).$$

y

$$D\mathbf{x}(\mathbf{q}) \cdot \mathbf{e}_2 = \left(\frac{\partial x}{\partial v}, \frac{\partial y}{\partial v}, \frac{\partial z}{\partial v} \right) = \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial v} = \mathbf{x}_v.$$

Superficies



La base canónica del plano tangente a S el punto $\mathbf{p} = \mathbf{x}(\mathbf{q})$.

Superficies

Como $\mathbf{x} : U \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow V \cap S \subset \mathbb{R}^3$, tenemos que en todo punto $\mathbf{q} \in U$, la derivada $D\mathbf{x}(\mathbf{q})$ es una aplicación lineal, y $D\mathbf{x}(\mathbf{q}) : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$.

A partir de lo anterior, tenemos que

$$D\mathbf{x}(\mathbf{q}) = \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial u}(\mathbf{q}) & \frac{\partial x}{\partial v}(\mathbf{q}) \\ \frac{\partial y}{\partial u}(\mathbf{q}) & \frac{\partial y}{\partial v}(\mathbf{q}) \\ \frac{\partial z}{\partial u}(\mathbf{q}) & \frac{\partial z}{\partial v}(\mathbf{q}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial u}(\mathbf{q}) & \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial v}(\mathbf{q}) \end{pmatrix}.$$

pues

$$D\mathbf{x}(\mathbf{q}) \cdot \mathbf{e}_1 = \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial u}(\mathbf{q}) \\ \frac{\partial y}{\partial u}(\mathbf{q}) \\ \frac{\partial z}{\partial u}(\mathbf{q}) \end{pmatrix}, \quad \text{y} \quad D\mathbf{x}(\mathbf{q}) \cdot \mathbf{e}_2 = \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial v}(\mathbf{q}) \\ \frac{\partial y}{\partial v}(\mathbf{q}) \\ \frac{\partial z}{\partial v}(\mathbf{q}) \end{pmatrix}.$$

Superficies

Recordemos la definición de superficie regular.

La condición de regularidad puede expresarse exigiendo que los dos vectores

$$\mathbf{x}_u(\mathbf{q}) = \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial u}(\mathbf{q}) \quad \text{y} \quad \mathbf{x}_v(\mathbf{q}) = \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial v}(\mathbf{q})$$

sean linealmente independientes en todo punto $\mathbf{q} \in U$.

Equivalentemente, $\frac{\partial \mathbf{x}}{\partial u}(\mathbf{q}) \times \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial v}(\mathbf{q}) \neq \mathbf{o}$.

Otra forma de ver esto último es que alguno de los determinantes menores de la matriz $D\mathbf{x}(\mathbf{q})$ no se anule:

$$\frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix}, \quad \frac{\partial(x, z)}{\partial(u, v)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial z}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial v} \end{vmatrix}, \quad \frac{\partial(y, z)}{\partial(u, v)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \\ \frac{\partial z}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial v} \end{vmatrix}.$$