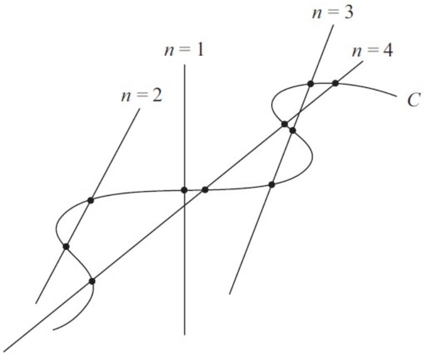
Propiedades globales de curvas planas

Alan Reyes-Figueroa

Geometría Diferencial (Aula 12) 18.febrero.2025

Definición

*Sea $\alpha : I \to \mathbb{R}^2$ una curva regular plana, y sea ℓ una recta en $\mathbb{R}^2$. La **multiplicidad** de ℓ es el número de intersecciones $|\alpha \cap \ell|$.*

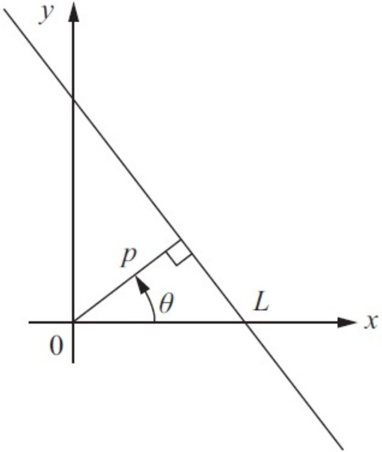


Intersecciones entre curvas y rectas

Asociamos una medida a un subconjunto de rectas del plano. Primero, observemos que toda recta ℓ en $\mathbb{R}^2$ está determinada por la menor distancia de ℓ al origen O, denotada $p \geq 0$, y por el ángulo $\theta \in [0, 2\pi)$ que la recta normal a ℓ hace con el eje Ox.

La ecuación de la recta ℓ está dada por

$$x \cos\theta + y \sin\theta = p.$$



Intersecciones entre curvas y rectas

Identificamos el conjunto de rectas en el plano por el conjunto

$$\mathcal{L} = \{(p, \theta) \in \mathbb{R}^2 : p \geq 0, 0 \leq \theta < 2\pi\} = [0, \infty) \times S^1.$$

Recordemos que el área de un subconjunto $S \subseteq \mathbb{R}^2$ como

$$A(S) = \int_S d\omega = \int_S dx\, dy,$$

donde $\omega = dx \wedge dy$ es la 2-forma diferencial del elemento de área.

Objetivo 1: Mostrar que a menos de multiplicación por constantes, $\omega = dx\, dy$ es la única 2-forma invariante por movimientos rígidos del plano.

Definición

Un conjunto $S \subseteq \mathbb{R}^2$ *es* ***mesurable*** *(o* ***medible****), si la integral*

$$\int_S dx\,dy$$

existe (puede ser finita o no).
Equivalentemente, S *es mesurable si, y sólo si, la función indicadora*

$$\mathbf{1}_S(\mathbf{x}) = \begin{cases} 1, & \text{si } \mathbf{x} \in S; \\ 0, & \text{si } \mathbf{x} \notin S. \end{cases}$$

es mesurable.

En ese caso, el valor de la integral $A(S) = \int_S dx\,dy$ es el área de S.

Teorema (Cambio de variable)

Sean A y B subconjuntos abiertos y con volumen de $\mathbb{R}^n$, y sea $g : A \to B$ un difeomorfismo clase C^1. Entonces, para toda función integrable $f : B \to \mathbb{R}$, la función $f \circ g : A \to \mathbb{R}$ es integrable en A, y vale

$$\int_B f = \int_A (f \circ g)\, \det Dg.$$

En particular, para $\mathbb{R}^2$, usando una notación más común

$$\iint_{g(A)} f(x,y)\,dx\,dy = \iint_A f\big(g(\tilde{x},\tilde{y})\big)\, \det Dg(\tilde{x},\tilde{y})\,d\tilde{x}\,d\tilde{y}.$$

Aquí, $x = g_1(\tilde{x},\tilde{y})$, $y = g_2(\tilde{x},\tilde{y})$ son las funciones componentes de g.

Invarianza del área

Propiedad

El área es una función invariante por movimientos rígidos.

<u>Prueba</u>:
Sea $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ movimiento rígido. Entonces T es difeomorfismo ($T(\mathbf{x}) = A\mathbf{x} + \mathbf{v}$ es diferenciable, con inversa $T^{-1}(\mathbf{x}) = A^{-1}(\mathbf{x} - \mathbf{v})$, también diferenciable). Además, $DT = A \;\Rightarrow\; \det DT = \det A = 1$, ya que $A \in SO(2)$.

Si $S \subseteq \mathbb{R}^2$ es mesurable, entonces $\tilde{S} = T(S)$ es mesurable.
Del teorema del cambio de variable, con $f = 1$, $g = T$ y $f \circ T = 1$:

$$A(\tilde{S}) = \int_{\tilde{S}} dx\, dy = \int_{T(S)} dx\, dy = \int_S \det T\, d\tilde{x}\, d\tilde{y} = \int_S d\tilde{x}\, d\tilde{y} = A(S). \square$$

Propiedad

Sea $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ una función continua. Para cualquier subconjunto mesurable $S \subseteq \mathbb{R}^2$ definamos la función

$$F(S) = \int_S f(x, y)\, dx\, dy.$$

Si F es invariante por movimientos rígidos, esto es, para todo $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ mov. rígido, y para todo S, $\tilde{S} = T(S)$ vale

$$F(\tilde{S}) = \int_{\tilde{S}} f(\tilde{x}, \tilde{y})\, d\tilde{x}\, d\tilde{y} = \int_S f(x, y)\, dx\, dy = F(S),$$

entonces f es constante.

Invarianza del área

Prueba:
Del teorema del cambio de variable

$$\int_{g(S)} f = \int_S (f \circ g) \det Dg.$$

En particular, para $g = T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ movimiento rígido, tenemos $\det DT = 1$, de modo que

$$\int_{T(S)} f(x,y)\, dx\, dy = \int_S f(\tilde{x},\tilde{y})\, d\tilde{x}\, d\tilde{y}.$$

Como esto vale para todo subconjunto mesurable $S \subseteq \mathbb{R}^2$, entonces $f(\tilde{x}(x,y), \tilde{y}(x,y)) = f(x,y)$, $\forall x, y$.
Ahora, para todo par de puntos (x,y) y $(\tilde{x},\tilde{y})$ en $\mathbb{R}^2$, existe un movimiento rígido T_0 tal que $T_0(x,y) = (\tilde{x},\tilde{y})$. Luego

$$f(\tilde{x},\tilde{y}) = f\big(T_0(x,y)\big) = (f \circ T_0)(x,y) = f(x,y).$$

Como esto vale para todo movimiento rígido T, entonces f es constante. $\square$

UNIVERSIDAD DEL VALLE DE GUATEMALA

El espacio de rectas en $\mathbb{R}^2$

Recordemos nuestra espacio de rectas en el plano:

$$\mathcal{L} = \{(p,\theta) \in \mathbb{R}^2 : p \geq 0, 0 \leq \theta < 2\pi\} = [0,\infty) \times S^1.$$

Sea $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ un movimiento rígido, con $T(\mathbf{x}) = A\mathbf{x} + \mathbf{v}$. Como $A \in SO(2)$, podemos escribir

$$A = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}, \quad \mathbf{v} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix},$$

para algún $\varphi \in [0, 2\pi)$, $a, b \in \mathbb{R}$. Entonces T induce la transformación de coordenadas

$$\begin{aligned} x &= a + \tilde{x}\cos\varphi - \tilde{y}\sin\varphi, \\ y &= b + \tilde{x}\sin\varphi + \tilde{y}\cos\varphi. \end{aligned}$$

Este cambio de coordenadas induce una transformación en $\mathcal{L}$.

El espacio de rectas en $\mathbb{R}^2$

Aplicando T a la ecuación de la recta $\ell : x\cos\theta + y\sin\theta = p$, obtenemos

$$\begin{aligned}
x\cos\theta + y\sin\theta &= p \\
(a + \tilde{x}\cos\varphi - \tilde{y}\sin\varphi)\cos\theta + (b + \tilde{x}\sin\varphi + \tilde{y}\cos\varphi)\sin\theta &= p \\
a\cos\theta + b\sin\theta + \tilde{x}(\cos\varphi\cos\theta + \sin\varphi\sin\theta) + \tilde{y}(\cos\varphi\sin\theta - \sin\varphi\cos\theta) &= p \\
a\cos\theta + b\sin\theta + \tilde{x}\cos(\theta - \varphi) + \tilde{y}\sin(\theta - \varphi) &= p.
\end{aligned}$$

En particular, $\tilde{x}\cos(\theta - \varphi) + \tilde{y}\sin(\theta - \varphi) = p - a\cos\theta - b\sin\theta$.

Haciendo $\tilde{\theta} = \theta - \varphi$, y $\tilde{p} = p - a\cos\theta - b\sin\theta$, la nueva ecuación de la recta $T(\ell)$ es

$$\tilde{x}\cos\tilde{\theta} + \tilde{y}\sin\tilde{\theta} = \tilde{p}.$$

El espacio de rectas en $\mathbb{R}^2$

Entonces, T induce una transformación en el espacio coordenado (p, θ):

$$\begin{aligned} \tilde{p} &= p - a\cos\theta - b\sin\theta, \\ \tilde{\theta} &= \theta - \varphi, \end{aligned}$$

cuyo determinante jacobiano está dado por

$$\det DT(p,\theta) = \det \begin{vmatrix} \frac{\partial \tilde{p}}{\partial p} & \frac{\partial \tilde{p}}{\partial \theta} \\ \frac{\partial \tilde{\theta}}{\partial p} & \frac{\partial \tilde{\theta}}{\partial \theta} \end{vmatrix} = \det \begin{pmatrix} 1 & a\sin\theta - b\cos\theta \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = 1.$$

Obs!: $T : (p,\theta) \to (\tilde{p}, \tilde{\theta})$ de alguna forma define también una transformación que preserva áreas en el espacio de rectas $\mathcal{L}$.

El teorema de Cauchy-Crofton

Definición

*Sea $S \subseteq \mathcal{L}$. Definimos la **medida** o **"área"** de S por*

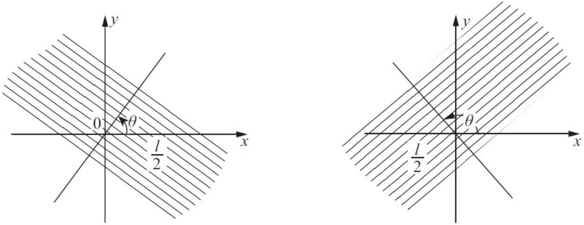
$$A(S) = \iint_S dp\, d\theta.$$

Teorema (Fórmula de Cauchy-Crofton)

Sea $\alpha : I \to \mathbb{R}^2$ una curva plana regular, de longitud L. La medida del conjunto de rectas en el plano, que intersectan a α, contadas con multiplicidad, es $2L$.

Esquema de prueba:

Caso 1: Segmentos.
Supongamos que α es un segmento de recta de longitud *L*. Como la medida es invariante por movimientos rígidos, podemos mover el origen *O* está en el punto medio de α, y el eje *Ox* es paralelo a α.



El teorema de Cauchy-Crofton

La medida del conjunto S de rectas que intersecan a α ($n = 1$) es

$$\iint_S n\, dp\, d\theta = \int_0^{2\pi} \int_0^{\frac{1}{2}L|\cos\theta|} dp\, d\theta = \int_0^{2\pi} \frac{L}{2} |\cos\theta|\, d\theta.$$

Luego,

$$\begin{aligned} \iint_S n\, dp\, d\theta &= \int_0^{2\pi} \frac{L}{2} |\cos\theta|\, d\theta = \frac{L}{2} \Big(\int_0^{\pi} \cos\theta\, d\theta - \int_{\pi}^{2\pi} \cos\theta\, d\theta \Big) \\ &= 4 \cdot \frac{L}{2} \int_0^{\pi/2} \cos\theta\, d\theta = 2L \sin\theta \Big|_0^{\pi/2} \\ &= 2L, \end{aligned}$$

y el resultado vale para segmentos de recta.

El teorema de Cauchy-Crofton

Caso 2: Poligonales.
Sea ahora α es una curva poligonal, esto es $\alpha = \bigcup_{i=1}^{k} \alpha_i$ es la unión de un número finito de segmentos α_i, cada uno de longitud L_i, $i = 1, \ldots, k$, con $L = \sum_{i=1}^{k} L_i$.

Del caso anterior, el área del conjunto de rectas que intersecan a segmento α_i es

$$A(S_i) = \int_{S_i} n \, dp \, d\theta = 2L_i, \quad i = 1, 2, \ldots, k.$$

Haciendo la suma para cada segmento, tenemos que la medida del total de rectas que intersecan *alpha* es

$$A(S) = \int_{S} n \, dp \, d\theta = \int_{S_1 \cup \ldots \cup S_k} n \, dp \, d\theta = \sum_{i=1}^{k} \int_{S_i} n \, dp \, d\theta = \sum_{i=1}^{k} 2L_i = 2L.$$

El teorema de Cauchy-Crofton

Caso 3: Caso general.
Sea $\alpha : [a, b] \to \mathbb{R}^2$ una curva plana diferenciable y regular (clase C^1). A nivel local, α puede aproximarse por una poligonal $P_0P_1 \ldots P_k$, tomando una partición $P : a = t_0 < t_1 < t_2 < \ldots < t_k = b$ del intervalo $[a, b]$, con $P_i = \alpha(t_i)$, de modo que la poligonal $\tilde{\alpha} = P_0P_1 \ldots P_k$ tiene longitud L, y satiface

$$\left| \int_{S(\alpha)} n \, dp \, d\theta - \int_{S(\tilde{\alpha})} n \, dp \, d\theta \right| < \varepsilon.$$

Tomando el límite cuando $\Delta P \to 0$, resulta

$$\int_{S(\alpha)} n \, dp \, d\theta = \int_{S(\tilde{\alpha})} n \, dp \, d\theta = 2L.$$

El teorema de Cauchy-Crofton

Portanto, la propiedad requerida vale para curvas C^1.

Caso 4: Curvas C^1 por partes.
Finalmente, de la igualdad en el caso anterior, es posible extender el resultado del teorema a curvas C^1 por partes, descomponiendo $\alpha = \bigcup_{i=1}^{r} \alpha_i$ como unión finita de curvas α_i, todas de clase C^1.

$$A(S) = \int_S dp\, d\theta = \int_{S_1 \cup \ldots \cup S_r} dp\, d\theta = \sum_{i=1}^{r} \int_{S_i} dp\, d\theta = \sum_{i=1}^{r} 2L_i = 2L. \qquad \square$$

Aplicación

El teorema de Cauchy-Crofton puede utilizarse para obtener una forma eficiente de estimar longitudes de curvas.

De hecho, una buena aproximación para la integral $\iint_S n\,dp\,d\theta$ se da de la siguiente manera:

- Considere una familia de líneas rectas paralelas tal que dos líneas consecutivas están a una distancia r. Gire esta familia por ángulos de θ (e.g. $\theta = \frac{\pi}{4}, \frac{2\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}$) para obtener cuatro familias de líneas rectas.
- Sea n el número de puntos de intersección de una curva α con todas estas líneas.
- Entonces

$$L = \frac{1}{2}\iint_S n\,dp\,d\theta \approx \frac{1}{2} n r \frac{\pi}{4}.$$

Aplicación