El teorema fundamental de curvas planas

Alan Reyes-Figueroa

Geometría Diferencial (Aula 07) 30.enero.2025

Teorema (Teorema Fundamental de la teoría local de curvas planas)

Sea $\kappa_0 : I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función diferenciable, definida en un intervalo abierto I de $\mathbb{R}$. Entonces, existe una curva plana $\alpha : I \to \mathbb{R}^2$, parametrizada por longitud de arco, tal que $\kappa_\alpha(s) = \kappa_0(s)$, $\forall s \in I$, donde κ_α es la curvatura de α.

Más aún, si $\beta : I \to \mathbb{R}^2$ es otra curva plana, parametrizada por longitud de arco, con $\kappa_\beta(s) = \kappa_0(s)$, $\forall s$, entonces existe un movimiento rígido $M : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ tal que $\beta = M \circ \alpha$. (Esto es, la curva es única a menos de transformaciones rígidas.)

Prueba:
Definimos una función $\theta : I \to \mathbb{R}$ por $\int_{s_0}^{s} \kappa_0(u)\,du$, con $s_0 \in I$.
Entonces, θ es diferenciable, y corresponde (a menos de una constante) al ángulo que forma el tangente $\mathbf{t}(s)$ con el eje Ox.
Si definimos

$$\alpha(s) = \Big(\int_{s_0}^{s} \cos\theta(u)\,du, \int_{s_0}^{s} \sin\theta(u)\,du \Big), \quad s_0 \in I.$$

Luego $\mathbf{t}(s) = \alpha'(s) = (\cos\theta(s), \sin\theta(s))$, tenemos que $|\alpha'(s)| = 1$, $\forall s$. Luego, α es una curva parametrizada por longitud de arco.
Su referencial de Frenet es

$$\mathbf{t}(s) = (\cos\theta(s), \sin\theta(s)), \quad \mathbf{n}(s) = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \mathbf{t} = (-\sin\theta(s), \cos\theta(s)).$$

Curvas planas

Por otro lado, $\mathbf{t}'(s) = (-\theta'(s)\sin\theta(s), \theta'(s)\cos\theta(s))$,
y por definición de curvatura, tenemos

$$\kappa_\alpha(s) = \langle \mathbf{t}'(s), \mathbf{n}(s)\rangle = \theta'(s) = \kappa_0(s),$$

como queríamos.

Ahora suponga que $\beta : I \to \mathbb{R}^2$ es otra curvar regular plana, parametrizada por longitud de arco con $\kappa_\beta(s) = \kappa_0(s)$, $\forall s$.
Fijamos $s_0 \in I$. Como los referenciales de Frenet de α y β en s_0, $\{\mathbf{t}_\alpha(s_0), \mathbf{n}_\alpha(s_0)\}$ y $\{\mathbf{t}_\beta(s_0), \mathbf{n}_\beta(s_0)\}$, forman bases ortonormales de $\mathbb{R}^2$, existe una única matriz ortogonal $A \in O(2)$ tal que

$$A\mathbf{t}_\alpha(s_0) = \mathbf{t}_\beta(s_0), \quad A\mathbf{n}_\alpha(s_0) = \mathbf{n}_\beta(s_0).$$

Curvas planas

Sea $\mathbf{v} = \beta(s_0) - A\alpha(s_0) \in \mathbb{R}^2$ y considere $M : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ el movimiento rígido $M(\mathbf{x}) = A\mathbf{x} + \mathbf{v}$.

Mostramos que la curva $\gamma = M \circ \alpha$ coincide con β:

$$
\begin{aligned}
\gamma(s_0) &= A\alpha(s_0) + \mathbf{v} = \beta(s_0), \\
\mathbf{t}_\gamma(s_0) &= A\mathbf{t}_\alpha(s_0) = \mathbf{t}_\beta(s_0), \\
\mathbf{n}_\gamma(s_0) &= \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \mathbf{t}_\gamma(s_0) = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \mathbf{t}_\beta(s_0) = \mathbf{n}_\beta(s_0).
\end{aligned}
$$

Pero, de lo visto anteriormente,

$$\kappa_\gamma(s) = \kappa_\alpha(s) = \kappa_0(s), \quad \forall s \in I.$$

Curvas planas

Si definimos $f : I \to \mathbb{R}$ por

$$f(s) = \tfrac{1}{2}\left[|\mathbf{t}_\beta(s) - \mathbf{t}_\gamma(s)|^2 + |\mathbf{n}_\beta(s) - \mathbf{n}_\gamma(s)|^2\right],$$

entonces $f(s_0) = 0$ con

$$f'(s) = \langle \mathbf{t}'_\beta(s) - \mathbf{t}'_\gamma(s), \mathbf{t}_\beta(s) - \mathbf{t}_\gamma(s)\rangle + \langle \mathbf{n}'_\beta(s) - \mathbf{n}'_\gamma(s), \mathbf{n}_\beta(s) - \mathbf{n}_\gamma(s)\rangle.$$

De las ecuaciones de Frenet, y el hecho que $\kappa_\beta = \kappa_\gamma = \kappa_0$, tenemos que $f'(s) = 0$, $\forall s \in I$. Luego $f \equiv 0$ se anula en todo punto y entonces

$$\mathbf{t}_\beta(s) - \mathbf{t}_\gamma(s) = \mathbf{0}, \quad \forall s \in I,$$

$\Rightarrow \beta(s) - \gamma(s) = \textit{constante}$. Pero, $\beta(s_0) = \gamma(s_0) \Rightarrow \beta(s) = \gamma(s)$, $\forall s$. Esto muestra que $\beta = \gamma = M \circ \alpha$. $\square$