Teoría local de curvas parametrizadas

Alan Reyes-Figueroa

Geometría Diferencial (Aula 04) 23.enero.2025

Curvas planas

Sea $\alpha : I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ una curva regular ($\alpha' \neq 0$), parametrizada por longitud de arco. Denotamos al vector tangente como

$$\mathbf{t}(s) = \alpha'(s), \quad \forall s \in I.$$

Definimos un vector normal unitario $\mathbf{n}(s) \in \mathbb{R}^2$ de modo que las bases ortonormales $\{\mathbf{t}(s), \mathbf{n}(s)\}$ y $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2\}$ tengan la misma orientación.

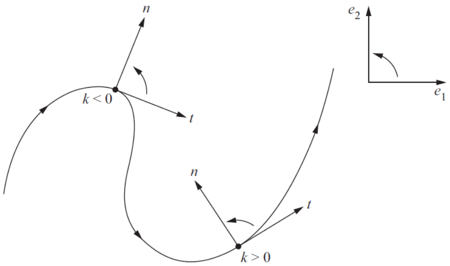
Como $\mathbf{t}(s) \cdot \mathbf{t}(s) = |\mathbf{t}(s)|^2 = 1$, diferenciando respecto de s

$$2\mathbf{t}'(s) \cdot \mathbf{t}(s) = \mathbf{t}'(s) \cdot \mathbf{t}(s) + \mathbf{t}(s) \cdot \mathbf{t}'(s) = 0.$$

Luego, $\mathbf{t}(s)$ y $\mathbf{t}'(s)$ son ortogonales, y se tiene que

$$\alpha''(s) = \mathbf{t}'(s) = \kappa(s)\mathbf{n}(s).$$

Curvas planas



Definición

*El número $\kappa(s)$ se llama la **curvatura** de α en el punto s.*

A la recta generada por el vector $\mathbf{n}(s)$ se le llama la **recta normal**.

El signo de $\kappa(s)$ indica la dirección en la cual rota la curva α (o su tangente). $\kappa(s) > 0$ indica que la curva rota a la izquierda, $\kappa < 0$ indica que rota hacia la derecha.

Definición

*Los puntos donde $\alpha''(s) = 0$ se llaman **puntos de inflexión**, y corresponden a aquellos puntos donde la curvatura κ cambia de signo.*

Curvas planas

Consideremos la matriz de rotación $R = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \in O(2)$, la cual rota cualquier vector de $\mathbb{R}^2$ un total de 90° en el sentido positivo.

Tenemos que los vectores unitarios **t** y **n** están relacionados mediante

$$\mathbf{n}(s) = R\,\mathbf{t}(s) \qquad \text{y} \qquad -\mathbf{t}(s) = R\,\mathbf{n}(s).$$

Derivando la primera ecuación, tenemos

$$\mathbf{n}'(s) = \big(R\,\mathbf{t}(s)\big)' = R\,\mathbf{t}'(s). \tag{1}$$

Por otro lado, como $\mathbf{t}'(s) = \kappa(s)\mathbf{n}(s)$, multiplicando esta ecuación por R, resulta

$$R\,\mathbf{t}'(s) = R\big(\kappa(s)\mathbf{n}(s)\big)\big) = \kappa(s)\,R\,\mathbf{n}(s) = -\kappa(s)\mathbf{t}(s). \tag{2}$$

Así, juntando las ecuaciones (1) y (2), obtenemos

$$\mathbf{n}'(s) = -\kappa(s)\mathbf{t}(s).$$

Curvas planas

Como resultado, se tiene el siguiente sistema de EDOs

$$\mathbf{t}'(s) = \kappa(s)\mathbf{n}(s), \quad \mathbf{n}'(s) = -\kappa(s)\mathbf{t}(s),$$

o en notación matricial

$$\begin{pmatrix} \mathbf{t}'(s) \\ \mathbf{n}'(s) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \kappa(s) \\ -\kappa(s) & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{t}(s) \\ \mathbf{n}(s) \end{pmatrix}.$$

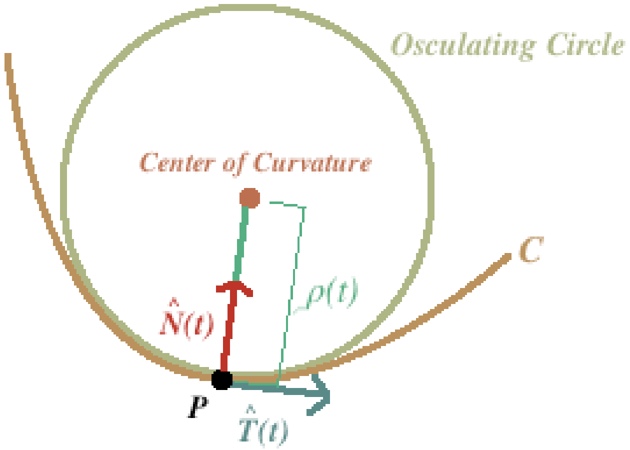
Estas ecuaciones son llamadas las **fórmulas de Frenet.**

Fijemos $s \in I$, y sea $P = \alpha(s)$, y sea ℓ la recta normal a α en P. Tomemos otro punto de la curva $Q = \alpha(s+h)$. Consideremos la recta normal m a α en Q. Y sea C el punto de intersección de las rectas ℓ y m.

Es posible mostrar que al tomar $h \to 0$, el punto C se estabiliza. Este punto resulta ser el centro de un círculo, que es tangencial a la curva en el punto P,

Definición

Este círculo con centro C tangente a la cuva α en el punto $\alpha(s) = P$ se llama el ***círculo osculador*** *a α en s.*


Osculating Circle
Center of Curvature
C
$\rho(t)$
$\hat{N}(t)$
P
$\hat{T}(t)$

Ejemplo:
Consideremos un círculo de radio $r > 0$ en $\mathbb{R}^2$. Su parametrización por longitud de arco es

$$\alpha(s) = (r\cos\tfrac{s}{r}, r\sin\tfrac{s}{r}), \quad s \in \mathbb{R}.$$

Luego, $\mathbf{t}(s) = \alpha'(s) = (-\sin\frac{s}{r}, \cos\frac{s}{r})$, $\mathbf{n}(s) = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\mathbf{t}(s) = (-\cos\frac{s}{r}, -\sin\frac{s}{r})$ y
$\alpha''(s) = (-\frac{1}{r}\cos\frac{s}{r}, -\frac{1}{r}\sin\frac{s}{r})$.
De ahí que

$$\mathbf{t}' = \tfrac{1}{r}\mathbf{n} \Rightarrow \kappa(s) = \tfrac{1}{r}, \ \ \forall s.$$

- Si α es un círculo, su curvatura $\kappa(s)$ es constante.

Teorema

Teorema: Una curva plana regular α tiene curvatura constante si, y sólo si, α es un trazo de circunferencia, o α es un segmento de recta.

Prueba:

- Caso $\kappa = 0$: $\kappa(s) = 0 \Leftrightarrow \alpha''(s) = \mathbf{0} \Leftrightarrow \alpha(s) = \mathbf{u} + \mathbf{v}s$ es una recta.
- Caso $\kappa > 0$: ($\Leftarrow$) Acabamos de mostrar que un círculo tiene curvatura constante. ($\Rightarrow$) Considere la cantidad $\alpha(s) + \frac{1}{\kappa}\mathbf{n}(s)$. Observe que al derivar

$$\big(\alpha(s) + \tfrac{1}{\kappa}\mathbf{n}(s)\big)' = \mathbf{t}(s) - \tfrac{1}{\kappa}\kappa\mathbf{t}(s) = \mathbf{t}(s) - \mathbf{t}(s) = \mathbf{0},$$

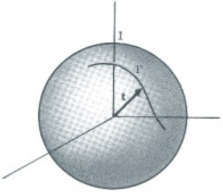
de modo que $\alpha(s) + \frac{1}{\kappa}\mathbf{n}(s) = C$ es constante. Esto muestra que α es un trazo de circunferencia con centro en C.

- Toda curva plana regular α, con curvatura no nula en el punto s, posee un círculo centrado en $C(s)$:
$$C(s) = \alpha(s) + \frac{1}{\kappa(s)}\mathbf{n}(s),$$
su *círculo osculador*.
- Este círculo es tangente a α en el punto s (punto de contacto de orden 2).
- La curva $C(s)$ formada por todos los centros de estos círculos osculadores a α, $s \mapsto \alpha(s) + \frac{1}{\kappa(s)}\mathbf{n}(s)$, se llama la **evoluta** o **curva focal** de α.

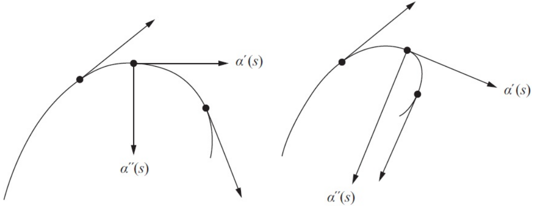
Proposición

Sea α una curva plana regular. El radio de círculo osculador de α en s está dado por $\rho(s) = 1/\kappa(s)$.

Sea $\alpha : I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ una curva diferenciable, parametrizada por longitud de arco (α es clase C^3 y regular). Entonces $|\alpha'(s)| = 1$, para todo $s \in I$.



Como $|\alpha'(s)|$ es constante, la segunda derivada $|\alpha''(s)|$ mide la tasa de variación de la dirección de $\alpha'(s)$.
Así, $|\alpha''(s)|$ proporciona una medida de cuán rápido la curva α se aleja de la recta tangente:



Definición

*Sea $\alpha : I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ una curva diferenciable, parametrizada por longitud de arco. Definimos la **curvatura** de α en el punto s por*

$$\kappa(s) = |\alpha''(s)|.$$

- $\kappa(s) \geq 0$, ya que corresponde a la norma de un vector.
- Si $\alpha(s) = \mathbf{u} + \mathbf{v}s$ es una recta en $\mathbb{R}^3$, $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^3$, $\mathbf{v} \neq \mathbf{0}$, entonces

$$\alpha'(s) = \mathbf{v},\ \alpha''(s) = \mathbf{0},\ \forall s \ \Rightarrow\ \kappa(s) = 0,\ \forall s.$$

- Recíprocamente, si α es una curva tal que $\kappa(s) = 0$, $\forall s$, entonces $\alpha''(s) = 0$ y por integración, $\alpha(s) = \mathbf{u} + \mathbf{v}s$ es una recta.

UNIVERSIDAD DEL VALLE DE GUATEMALA

Curvatura y torsión

Observe que $\alpha'(s)\cdot\alpha'(s) = |\alpha'(s)|^2 = 1$. Diferenciando respecto de s

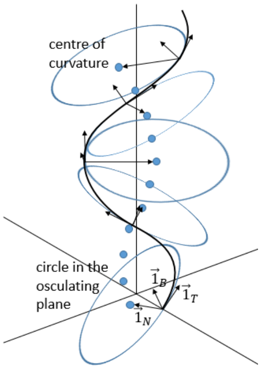
$$2\alpha''(s)\cdot\alpha'(s) = \alpha''(s)\cdot\alpha'(s) + \alpha'(s)\cdot\alpha''(s) = 0.$$

Luego, $\alpha''(s)$ y $\alpha'(s)$ son ortogonales.

Si $\alpha''(s) \neq \mathbf{0}$, podemos definir un vector unitario $\mathbf{n}(s)$ en la dirección de $\alpha''(s)$ por

$$\alpha''(s) = \kappa(s)\mathbf{n}(s).$$

Además, denotamos $\mathbf{t}(s) = \alpha'(s)$.



UNIVERSIDAD DEL VALLE DE GUATEMALA

Curvatura y torsión

Tenemos entonces
$$\mathbf{n}(s) \perp \mathbf{t}(s), \quad \forall s \text{ donde } \kappa(s) \neq 0.$$

El vector $\mathbf{t}(s)$ es el vector tangente a α en s. El vector $\mathbf{n}(s)$ se llama el vector normal a α en s. El plano generado por $\langle \mathbf{t}(s), \mathbf{n}(s) \rangle$ se llama el **plano osculador** o **plano osculante** a α en s.

Obs: Si $\alpha''(s) = \mathbf{0}$, el vector $\mathbf{n}(s) = \mathbf{0}$ y el plano osculador no está definido. Los puntos donde $\alpha''(s) = \mathbf{0}$ se llaman *puntos singulares de orden 1* (los puntos donde $\alpha'(s)$ se llaman *puntos singulares de orden 0*).

Curvatura y torsión

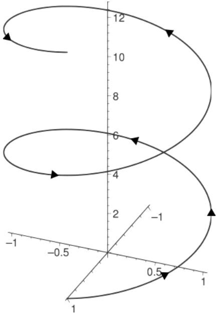
En lo que sigue, nos restringimos a curvas sin puntos singulares de orden 0 ó 1.

El vector unitario

$$\mathbf{b}(s) = \mathbf{t}(s) \times \mathbf{n}(s)$$

es normal al plano osculador y se llama el **vector binormal** a α en s.

Como $|\mathbf{b}(s)| = |\mathbf{t}(s)| \cdot |\mathbf{n}(s)| = 1$, entonces $|\mathbf{b}(s)|$ mide la tasa de variación del ángulo del plano osculador en una vecindad de s.



Curvatura y torsión

Tenemos varias relaciones entre $\mathbf{t}(s)$, $\mathbf{n}(s)$ y $\mathbf{b}(s)$:

- $\mathbf{t}'(s) = \alpha''(s) = \kappa(s)\mathbf{n}(s)$.

- $$\begin{aligned} \mathbf{b}'(s) &= \big(\mathbf{t}(s) \times \mathbf{n}(s)\big)' = \mathbf{t}'(s) \times \mathbf{n}(s) + \mathbf{t}(s) \times \mathbf{n}'(s) \\ &= \underbrace{\big(\kappa(s)\mathbf{n}(s) \times \mathbf{n}(s)\big)}_{=0} + \mathbf{t}(s) \times \mathbf{n}'(s) \\ &= \mathbf{t}(s) \times \mathbf{n}'(s) \end{aligned}$$

Luego, $\mathbf{b}'(s) \perp \mathbf{t}(s)$, y como $\mathbf{b}'(s) \perp \mathbf{b}(s)$ (¿por qué?), entonces $\mathbf{b}'(s)$ es paralelo a $\mathbf{n}(s)$.

De ahí que podemos escribir $\mathbf{b}'(s) = \tau(s)\mathbf{n}(s)$.

Definición

*El número $\tau(s)$ se llama la **torsión** de α en el punto s*

- Contrario a la curvatura, $\tau(s)$ puede ser positiva o negativa, ó cero.

- Si $\alpha(s)$ es una curva plana, entonces $\alpha(I)$ está contenida en un plano, el cual coincide con el plano osculador $\langle \mathbf{t}(s), \mathbf{n}(s) \rangle$, $\forall s$. Consecuentemente, $\tau(s) = 0$, $\forall s$.

- Recíprocamente, si $\tau(s) = 0$, $\forall s$, entonces $\mathbf{b}'(s) = 0 \cdot \mathbf{n}(s) = \mathbf{0} \Rightarrow \mathbf{b}(s)$ es constante, digamos $\mathbf{b}(s) = \mathbf{b}_0 \in \mathbb{R}^3$. Luego,

$$\big(\alpha(s) \cdot \mathbf{b}_0\big)' = \alpha'(s) \cdot \mathbf{b}_0 = \mathbf{t}(s) \cdot \mathbf{b}_0 = 0.$$

  Luego $\alpha(s) \cdot \mathbf{b}_0$ es constante $= 0 \Rightarrow \alpha$ es una curva contenida en un plano normal a $\mathbf{b}_0$, y α es una curva plana.