Curvas parametrizadas

Alan Reyes-Figueroa

Geometría Diferencial

(Aula 02) 16.enero.2025

Definición

*Una **curva parametrizada** α en $\mathbb{R}^n$ es una aplicación diferenciable definida en un intervalo abierto $(a, b) \subseteq \mathbb{R}$, $\alpha : (a, b) \to \mathbb{R}^n$.*

$$\alpha(t) = (x_1(t), x_2(t), \ldots, x_n(t)) \in \mathbb{R}^n, \quad \text{para } t \in (a, b).$$

- La función α lleva el parámetro $t \in (a, b)$ en un punto $\alpha(t)$ de $\mathbb{R}^n$.
- Cuando decimos que α es diferenciable, usualmente entenderemos estos como que α es clase C^∞ (infinitamente diferenciable).
  Obs! En el libro de Do Carmo, diferenciable = C^∞. Cuidado!, en otros textos, diferenciable = C^1. Cuando sea conveniente, indicaremos explícitamente que α es de clase C^k.
- Entenderemos intervalo abierto en el sentido amplio (incluimos los casos $a = -\infty$, $b = \infty$).

Curvas parametrizadas

Sea $\alpha(t)$ una curva de clase C^1 en $\mathbb{R}^n$. La derivada

$$\alpha'(t) = (x_1'(t), x_2'(t), \ldots, x_n'(t)) \in \mathbb{R}^n$$

será llamada el **vector tangente** (o *vector velocidad*) de α en el punto t.

Si $I = (a, b)$, la imagen $\alpha(I)$ se llama el **trazo** de la curva α.

- No se debe confundir a la curva α con su trazo. Pueden existir diferentes curvas, todas con un mismo trazo o imagen.

Ejemplo

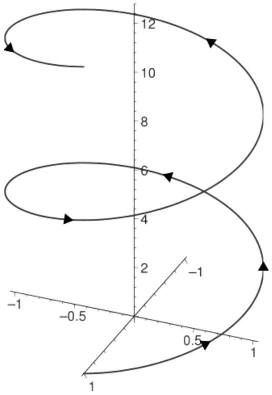
Dados $a, b, c \in \mathbb{R}$, la curva parametrizada

$$\alpha(t) = (a \cos ct, a \sin ct, bt), \quad t \in \mathbb{R}$$

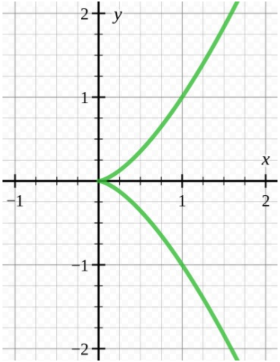
tiene por trazo una hélice de paso $2\pi b$ sobre el cilindro $x^2 + y^2 = a^2$ en $\mathbb{R}^3$.

α es una curva parametrizada diferenciable (de clase C^∞). Su vector tangente está dado por

$$\alpha'(t) = (-ac \sin ct, ac \cos ct, b) \in \mathbb{R}^3.$$



Ejemplo



$y^2 = x^3$.

La aplicación $\alpha(t) = (t^2, t^3)$, con $t \in \mathbb{R}$, es una curva parametrizada diferenciable (clase C^∞). Su trazo es una cúspide.

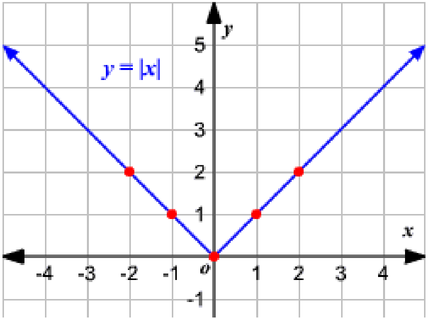
Su derivada es $\alpha'(t) = (2t, 3t^2)$. Observe que en $t = 0$, $\alpha(0) = (0, 0)$ y su vector tangente es $\alpha'(0) = (0, 0)$.

Observe que $\beta(t) = (t^{2/3}, t)$, con $t \in \mathbb{R}$, es otra parametrización de la curva, pero no es diferenciable en $t = 0$.

Cuando sea conveniente, identificaremos una curva α en $\mathbb{R}^m$ a una curva en $\mathbb{R}^{m+p}$ mediante una inclusión $\alpha(t) = (x_1(t), \ldots, x_m(t)) \longrightarrow (x_1(t), \ldots, x_m(t), 0, 0, \ldots, 0)$.

Ejemplo

La curva $\alpha : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ data por $\alpha(t) = (t, |t|)$, no es una curva diferenciable en $t = 0$. En este caso, α sólo es de clase C^0.



Ejemplos

Las curvas parametrizadas $\alpha : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ y $\beta : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ dadas por

$$\begin{aligned} \alpha(t) &= (\cos t, \sin t) \\ \beta(t) &= (\cos 2t, \sin 2t) \end{aligned}$$

ambas poseen el mismo trazo (el círculo unitario S^1). Observe que el vector velocidad de la curva β es el doble del de la curva α.

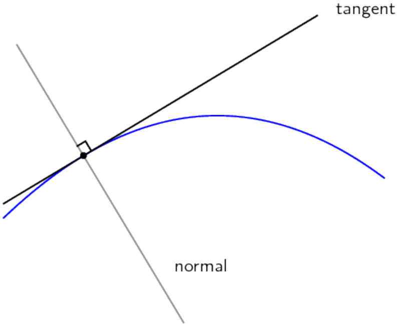
$$\begin{aligned} \alpha'(t) &= (-\sin t, \cos t) & |\alpha'| &= 1, \\ \beta'(t) &= (-2\sin 2t, 2\cos 2t) & |\beta'| &= 2. \end{aligned}$$

(la curva β recorre el círculo el doble de rápido que α).

Curvas parametrizadas

Sea α una curva parametrizada de clase C^1 en $\mathbb{R}^n$. Si $\alpha'(t) \neq \mathbf{0}$ en un punto $\mathbf{p} = \alpha(t)$, entonces en el punto $\mathbf{p}$ está bien definida una recta en la dirección de $\mathbf{v} = \alpha'(t)$.

Esta se llama la **recta tangente** a α en el punto $\mathbf{p}$.



- Esta recta es esencial para el desarrollo de la geometría diferencial de curvas.
- Usualmente requeriremos que una curva α tenga recta tangente definida en todos sus puntos.

Definición

Sea $\alpha : (a, b) \to \mathbb{R}^n$ una curva parametrizada de clase C^1. Si para algún $t \in (a, b)$ se tiene que $\alpha'(t) = \mathbf{0}$, entonces diremos que t es un ***punto singular*** *de α.*
Un punto $t \in (a, b)$ donde $\alpha'(t) \neq \mathbf{0}$ se llama un ***punto regular*** *de α.*

Definición

Una curva $\alpha : (a, b) \to \mathbb{R}^n$ de clase C^1 tal que $\alpha'(t) \neq \mathbf{0}$, para todo $t \in (a, b)$, se llama una ***curva parametrizada regular****.*

Obs! De ahora en adelante nos limitamos a estudiar curvas regulares.

UNIVERSIDAD DEL VALLE DE GUATEMALA

Definición

Sea $\alpha : I = (c_1, c_2) \to \mathbb{R}^n$ una curva regular de clase C^1. La ***longitud de arco*** *de α, a partir de punto $t_0 \in I$ es*

$$s(t) = \int_{t_0}^{t} |\alpha'(\tau)|\, d\tau.$$

¿Por qué se define así la longitud de arco?

Recordemos que si $[a, b] \subset I$ y $t_0 = a < t_1 < t_2 < \ldots < t_k = b$ es una partición del intervalo $[a, b]$, podemos definir una poligonal $P = \{P_0, P_1, \ldots, P_k\}$, con $P_i = \alpha(t_i)$, $i = 0, 1, 2, \ldots, k$.

Longitud de arco

La longitud de esta poligonal es

$$\ell(\alpha, P) = \sum_{i=1}^{k} |P_i - P_{i-1}| = \sum_{i=1}^{k} |\alpha(t_i) - \alpha(t_{i-1})|.$$

Por el Teorema del Valor Medio, como α es diferenciable (en todo punto), para cada $i = 1, 2, \ldots, k$, existen $\xi_i \in (t_{i-1}, t_i)$ tales que

$$|\alpha(t_i) - \alpha(t_{i-1})| = |\alpha'(\xi_i) \cdot (t_i - t_{i-1})| = |\alpha'(\xi_i)|\, \Delta t_i.$$

Luego $\ell(\alpha, P) = \sum_{i=1}^{k} |\alpha'(\xi_i)|\, \Delta t_i$, y tomando el límite en la norma de la partición, obtenemos

$$s = \lim_{\Delta P \to 0} \ell(\alpha, P) = \int_{t_0}^{t} |\alpha'(\tau)|\, d\tau.$$

Longitud de arco

Como $\alpha'(t) \neq 0$ para todo t, la función $s(t)$ es diferenciable y

$$\frac{ds}{dt} = \frac{d}{dt}\int_{t_0}^{t} |\alpha'(\tau)|\, d\tau = |\alpha'(t)|.$$

Puede ocurrir que t ya sea la longitud de arco de la curva α medido a partir de cierto punto t_0. En este caso, $|\alpha'(t)| = \frac{ds}{dt} = 1$.

Recíprocamente, si $|\alpha'(t)| = 1$, entonces

$$s = \int_{t_0}^{t} |\alpha'(\tau)|\, d\tau = \int_{t_0}^{t} d\tau = t - t_0.$$

Así, s y t difieren apenas por una constante. En particular, $s = t - t_0$ es precisamente la longitud del intervalo $[t_0, t]$. La longitud de este intervalo coincide con la longitud del tramo de la curva entre t_0 y t, exactamente cuando $t_0 = 0$ y $s = t$.