



Superficie de Schwarz

Juan Luis Solórzano

2 de junio de 2024

breve historia

Nació en Hermsdorf (1843), Silesia y murió en Berlín (1921)

Estudió matemáticas en Berlín luego de ser persuadido por Kummer y Weierstraß

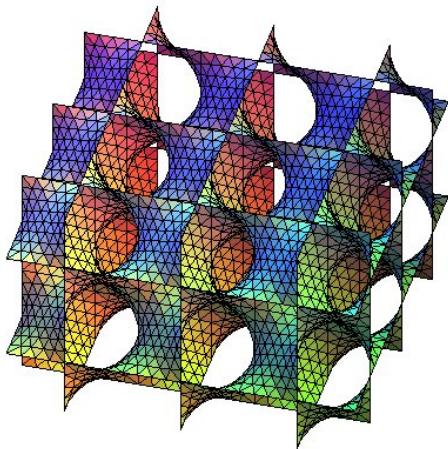
Campo de estudio

- Análisis real y compleja
- geometría diferencial
- calculo de variaciones

Primera publicación

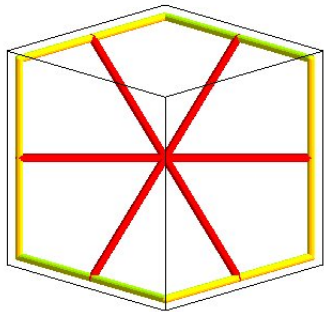
“búsqueda de una superficie mínima”
acabado en la Academia
de Berlín publicado en
1871. Fue reimpresso en
su Colección de
artículos matemáticos
(1890) version original.

Schwarz D-Superficie

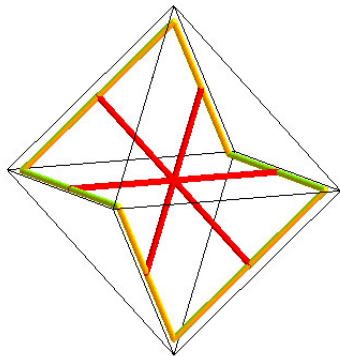


Problema de Platau

D-Superficie



P-Superficie



Algunas propiedades

- tiene periodo triple
- no tiene auto intersecciones
- parte el espacio en dos partes continuas

Representación de Weierstraß

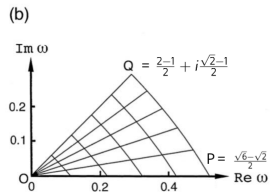
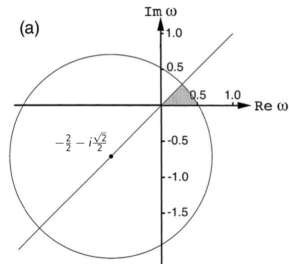
Sean $\Psi : U \rightarrow \bar{\mathbb{C}}$ y $\Phi : U \rightarrow \mathbb{C}$
tales que:

$$\Psi(z) = z$$

$$\Phi(z) = 2e^{i\theta}(z^8 - 14z^4 + 1)^{-\frac{1}{2}}$$

Donde:

- $\theta \in \mathbb{R}$
- U es la región sombreada al lado



Nota

- $\Psi(z) = z$ es meromorfa
- $\Phi(z) = \frac{2e^{i\theta}}{\sqrt{(z^8 - 14z^4 + 1)}}$ es holomorfa en el interior de la región sombreada

las raíces de $z^8 - 14z^4 + 1$ son: $\pm \frac{\sqrt{6} \pm \sqrt{2}}{2}$

Recordemos el corolario de la representación de Weierstraß:

$$x(u, v) = \operatorname{Re} \int_{z_0}^z \frac{1}{2} \Phi(\zeta) (1 - \Psi(\zeta)^2) d\zeta,$$

$$y(u, v) = \operatorname{Re} \int_{z_0}^z \frac{1}{2} \Phi(\zeta) (1 + \Psi(\zeta)^2) d\zeta,$$

$$z(u, v) = \operatorname{Re} \int_{z_0}^z \Phi(\zeta) \Psi(\zeta) d\zeta,$$

$$x(u, v) = \operatorname{Re} \int_0^z (1 - \zeta^2) e^{i\theta} (\zeta^8 - 14\zeta^4 + 1)^{\frac{-1}{2}} d\zeta,$$

$$y(u, v) = \operatorname{Re} \int_0^z i(1 + \zeta^2) e^{i\theta} (\zeta^8 - 14\zeta^4 + 1)^{\frac{-1}{2}} d\zeta,$$

$$z(u, v) = \operatorname{Re} \int_0^z 2\zeta e^{i\theta} (\zeta^8 - 14\zeta^4 + 1)^{\frac{-1}{2}} d\zeta,$$

parametrización de la P-superficie

Tomando $\theta = \frac{\pi}{2}$ y $z_0 = 0$ para obtener la parametrización de la P-superficie tenemos:

$$x(u, v) = \operatorname{Re} \int_0^z i(1 - \zeta^2)(\zeta^8 - 14\zeta^4 + 1)^{-\frac{1}{2}} d\zeta,$$

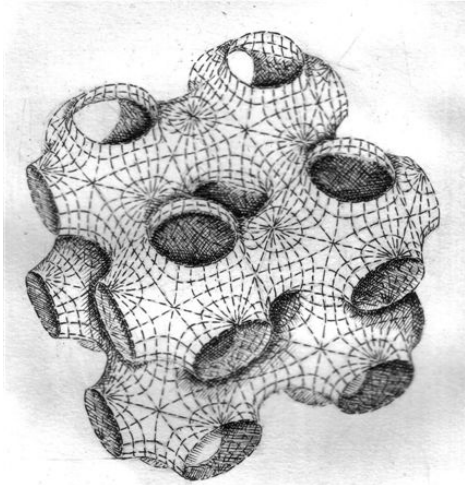
$$y(u, v) = \operatorname{Re} \int_0^z -(1 + \zeta^2)(\zeta^8 - 14\zeta^4 + 1)^{-\frac{1}{2}} d\zeta,$$

$$z(u, v) = \operatorname{Re} \int_0^z 2i\zeta(\zeta^8 - 14\zeta^4 + 1)^{-\frac{1}{2}} d\zeta,$$

aproximación

$$\cos(x) + \sin(x) + \cos(z) = 0$$

P-superficie



parametrización de la D-superficie

Tomando $\theta = 0$ y $z_0 = 0$ para obtener la parametrización de la D-superficie tenemos:

$$x(u, v) = \operatorname{Re} \int_0^z (1 - \zeta^2)(\zeta^8 - 14\zeta^4 + 1)^{\frac{-1}{2}} d\zeta,$$

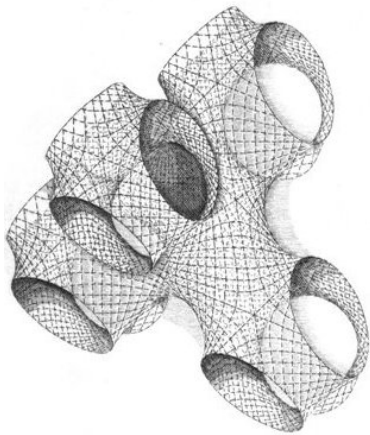
$$y(u, v) = \operatorname{Re} \int_0^z i(1 + \zeta^2)(\zeta^8 - 14\zeta^4 + 1)^{\frac{-1}{2}} d\zeta,$$

$$z(u, v) = \operatorname{Re} \int_0^z 2\zeta(\zeta^8 - 14\zeta^4 + 1)^{\frac{-1}{2}} d\zeta,$$

aproximación

$$\cos(x) \cos(y) \cos(z) = \sin(x) \sin(y) \sin(z)$$

P-superficie



Referencias



Robert Ferréo.

Schwarz minimal surfaces.

<https://mathcurve.com/surfaces.gb/schwarz/schwarz.shtml>.



François Aesculier.

Schwarz Minimal Surfaces.

<https://aesculier.fr/fichiersPovray/Schwarz/Schwarz.html>.



Patrice Jeener.

GRAVEUR SUR CUIVRE.

<http://arpam.free.fr/jeener.html>.

Referencias

-  Seung Chul Han, Jeong Myung Choi, Gang Liu, Kiju Kang.
A Microscopic Shell Structure with Schwarz's D-Surface.
Scientific Reports, 7(1):13618, 2017.
<https://www.nature.com/articles/s41598-017-13618-3>.
-  Paul J.F. Gandy, Jacek Klinowski.
Exact computation of the triply periodic Schwarz P minimal surface.
Chemical Physics Letters, 318(1-2):169–175, 2000.
<https://www.sciencedirect.com/science/article/abs/pii/S000926140000453X>.
-  Wolfgang Kühnel, Bruce Hunt (translator).
Differential Geometry: Curves – Surfaces – Manifolds.
Third Edition, AMS Student Mathematical Library, Volume 77, American Mathematical Society, Providence, Rhode Island, 2015.
ISBN: 978-1-4704-2320-9.