Superficie de Scherk I y II

Superficies mínimas

María José Gil

Geometría Diferencial
Facultad de Matemática
Universidad del Valle de Guatemala

May 31, 2024

Overview

1. Contexto Histórico
2. Parametrizaciónes y demostraciones
3. Algunas cosas más
4. Referencias

Contexto Histórico

Heinrich Ferdinand Scherk

Nació el 27 de Octubre de 1798 en Posen y murió el 4 de octubre de 1885. Obtuvo doctorados de Matemática y Asronomía, y fue alumno de grandes matemáticos como Bessel y Gauß

Luego de Leonhard Euler, quien descubrió el caso del **Cateonide**, y Jean-Baptiste Meusnier de la Place, quien descubrió el caso **Helicoide**, decubrió la tercer superficie mínima no trivial en 1834. Fue la primera superficie mínima descubierta desde 1776

Por el descubrimiento de esta superficie se le otorgó un premio de parte de la Académie des sciences

Figure: Heinrich Ferdinand Scherk

Primeras superficies mínimas

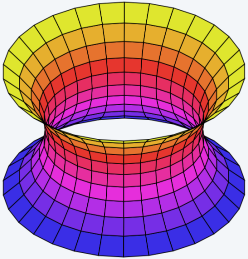


Figure: Catenoide

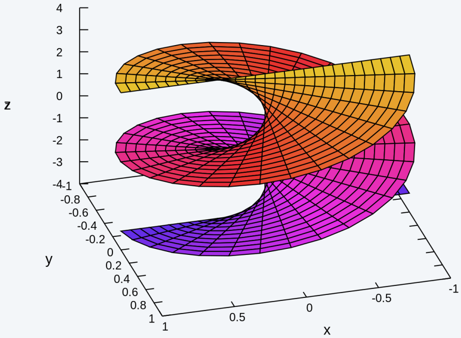


Figure: Helicoide

Superficies mínimas de Schrek

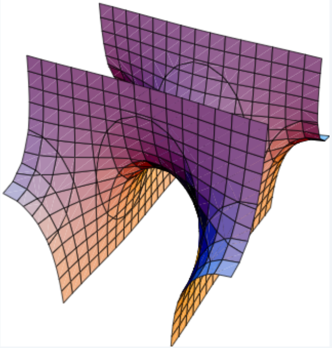


Figure: Superficie de Scherk I

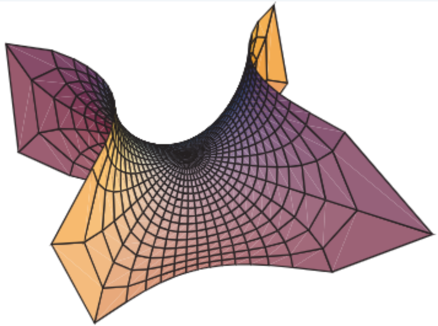


Figure: Superficie de Scherk II

Superficies mínimas de Scherk

Las dos superficies se parecen bastante. Eso es porque son una especie de rotación la una de la otra. Esto se puede ver de manera más clara en el siguiente gif y en las siguientes renderizaciónes 3d de la superficie de Sherk I y la superficie de Sherk II, donde en la II se muestran dos superficies pegadas

Parametrizaciónes y demostraciones

Parametrizacion y prueba Scherk I

La primera superficie mínima de Scherk es una super ficie mínima por construcción. Es decir se fuera a una superficie a que sea mínima encontrando las funciones uqe logran cumplir los requerimientos. Por esto mismo es que no existe primero la parametrización y luego la demostración, sino que demostrando que es mínima encontramos la parametrización.

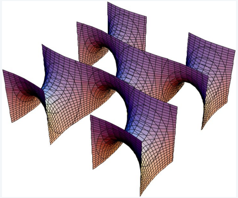


Figure: 5 unidades de la Superficie de Sherk I

Condición de divergencia

La ecuación de superficie mínima, o ecuación de Euler-Lagrange modificada se puede denotar como

$$\operatorname{div}\left(\frac{\nabla u_n(x,y)}{\sqrt{1+|\nabla u_n(x,y)|^2}}\right) \equiv 0$$

donde $z = u(x,y)$. Si una superficie cumple con la ecuación de superficie mínima, es una superficie mínima.

Corollary

Para una superficie dada por $u(x, y)$, tenemos que el vector normal es

$$\mathbf{N} = (-u_x, -u_y, 1)$$

, si normalizamos, obtenemos el vector normal unitario denotado por

$$\overline{\mathbf{N}} = \frac{(-u_x, -u_y, 1)}{\sqrt{1 + u_x^2 + u_y^2}}$$

.

Por otro lado, recordemos que la curvatura media ***H*** *de una superficie, puede ser definida como la divergencia del vector normal unitario, de modo que*

$$\mathbf{H} = \operatorname{div}(\overline{\mathbf{N}}) = \operatorname{div}\left(\frac{(-u_x, -u_y, 1)}{\sqrt{1 + u_x^2 + u_y^2}}\right)$$

Corollary

Recordemos que si $\boldsymbol{H} = 0$*, nuestra superficie es mínima. Por otro lado, veamos que podemos escribir*

$$\overline{\mathbf{N}} = \left(\frac{-u_x}{\sqrt{1+u_x^2+u_y^2}}, \frac{-u_y}{\sqrt{1+u_x^2+u_y^2}}, \frac{1}{\sqrt{1+u_x^2+u_y^2}} \right) = \frac{\nabla u}{\sqrt{1+|\nabla u|^2}}$$

Reescribiendo, tenemos entonces la ecuación de superficies mínimas

$$\operatorname{div}\left(\frac{\nabla u}{\sqrt{1+|\nabla u|^2}} \right) \equiv 0$$

Condición de divergencia

La meta principal de la ecuación de superficies mínimas, es no tener que encontrar las formas fundamentales de la superficie, ni tener que realizar productos de derivadas parciales, como en la ecuación de Lagrange. Esta modificación de la ecuación, utilizada por Scherk en 1830, fue la que le permitió deducir sus superficies mínimas, ya que previamente estas ecuaciones eran consideradas ”prácticamente inmanejables”. Estas ecuaciones fueron en el futuro utilizadas por otros matemáticos de superficies mínimas, como Catalán.

Ecuación de Lagrange

$$(1+z_x^2)z_{yy} - 2z_xz_yz_{xy} + (1+z_y^2)z_{xx} = 0$$

Demostración y parametrización

Para un número natural n encuentre la superficie mínima $\sum_n$ tal que sea el grafo de una función

$$u_n : \left(-\frac{\pi}{2}, +\frac{\pi}{2}\right) \times \left(-\frac{\pi}{2}, +\frac{\pi}{2}\right) \to \mathbb{R}$$

de tal modo que

$$\lim_{y \to \pm\pi/2} u_n(x, y) = +n \text{ para } -\frac{\pi}{2} < x < +\frac{\pi}{2},$$

$$\lim_{x \to \pm\pi/2} u_n(x, y) = -n \text{ para } -\frac{\pi}{2} < y < +\frac{\pi}{2}.$$

de modo que u_n debe cumplir con la ecuación de superficies mínimas

$$\operatorname{div}\left(\frac{\nabla u_n(x,y)}{\sqrt{1 + |\nabla u_n(x,y)|^2}}\right) \equiv 0$$

Y además

$$\Sigma_n = \left\{ (x, y, u_n(x, y)) \in \mathbb{R}^3 \,\middle|\, -\frac{\pi}{2} < x, y < +\frac{\pi}{2} \right\}.$$

de modo que encontramos la superficia que cumple las condiciones en el espacio delimitado, tal que la función del grafo

$$u : \left(-\frac{\pi}{2}, +\frac{\pi}{2}\right) \times \left(-\frac{\pi}{2}, +\frac{\pi}{2}\right) \to \mathbb{R}$$

es

$$\Sigma = \left\{ \left(x, y, \ln\left(\frac{\cos(x)}{\cos(y)}\right)\right) \in \mathbb{R}^3 \middle| -\frac{\pi}{2} < x, y < +\frac{\pi}{2} \right\}.$$

Ecuación Implícita

$$e^z \cos y = \cos x$$

Parametrización Sherk II

En este caso, comenzaremos por la ecuación implícita, y a partir de esta obtendremos la parametrización

Ecuación implícita

$$\sin(z) - \sinh(x)\sinh(y) = 0$$

Parametrización Enneper-Weierstraß

Sea $f(z) = \dfrac{4}{1 - z^4}$ y $g(z) = iz$, podemos parametrizar la función como

$$x(r,\theta) = 2\Re(\ln(1 + re^{i\theta}) - \ln(1 - re^{i\theta})) = \ln\left(\frac{1 + r^2 + 2r\cos\theta}{1 + r^2 - 2r\cos\theta}\right)$$

$$y(r,\theta) = \Re(4i\tan^{-1}(re^{i\theta})) = \ln\left(\frac{1 + r^2 - 2r\sin\theta}{1 + r^2 + 2r\sin\theta}\right)$$

$$z(r,\theta) = \Re(2i(-\ln(1 - r^2e^{2i\theta}) + \ln(1 + r^2e^{2i\theta})) = 2\tan^{-1}\left(\frac{2r^2\sin 2\theta}{r^4 - 1}\right)$$

para $\theta \in [0, 2\pi)$ y $r \in (0, 1)$

Primera Forma Fundamental

$$E = \frac{16(1+r^2)^2}{1+r^8-2r^4\cos(4\theta)}$$

$$F = 0$$

$$G = \frac{16r^2(1+r^2)^2}{1+r^8-2r^4\cos(4\theta)}$$

Segunda Forma Fundamental

$$e = \frac{8(1+r^4)\sin(2\theta)}{1+r^8-2r^4\cos(4\theta)}$$

$$f = \frac{8(1-r^4)\cos(2\theta)}{1+r^8-2r^4\cos(4\theta)}$$

$$g = \frac{8r^2(1+r^4)\sin(2\theta)}{1+r^8-2r^4\cos(4\theta)}$$

Demostración

Recordemos que una superficie es minima sí y solo sí su curvatura media es 0. Por otro lado, recordemos que la curvatura media la podemos calcular como

$$H = \frac{1}{2} * \frac{Eg + Ge - 2Ff}{EG - F^2}$$

.

Proof.

$$\frac{1}{2} * \frac{\frac{16(1+r^2)^2}{1+r^8-2r^4\cos(4\theta)}\frac{8r^2(1+r^4)\sin(2\theta)}{1+r^8-2r^4\cos(4\theta)} + \frac{16r^2(1+r^2)^2}{1+r^8-2r^4\cos(4\theta)}\frac{8(1+r^4)\sin(2\theta)}{1+r^8-2r^4\cos(4\theta)} - 2(0)\frac{8(1-r^4)\cos(2\theta)}{1+r^8-2r^4\cos(4\theta)}}{\frac{16(1+r^2)^2}{1+r^8-2r^4\cos(4\theta)}\frac{16r^2(1+r^2)^2}{1+r^8-2r^4\cos(4\theta)} - 0^2}$$

$$= \frac{1}{2}\frac{\frac{128\left(1+r^2\right)^2 r^2\left(1+r^4\right)\sin(2\theta)}{(1+r^8-2r^4\cos(4\theta))^2} + \frac{128r^2\left(1+r^2\right)^2\left(1+r^4\right)\sin(2\theta)}{(1+r^8-2r^4\cos(4\theta))^2}}{\frac{256(1+r^2)^4 r^2}{(1+r^8-2r^4\cos(4\theta))^2}}$$

$$= \frac{\frac{128r^2\sin(2\theta)\left(r^2+1\right)^2\left(r^4+1\right)}{(1+r^8-2r^4\cos(4))^2}}{\frac{256(1+r^2)^4 r^2}{(1+r^8-2r^4\cos(4\theta))^2}} = \frac{\sin(2\theta)\left(r^4+1\right)}{2\left(r^2+1\right)^2} = 0$$

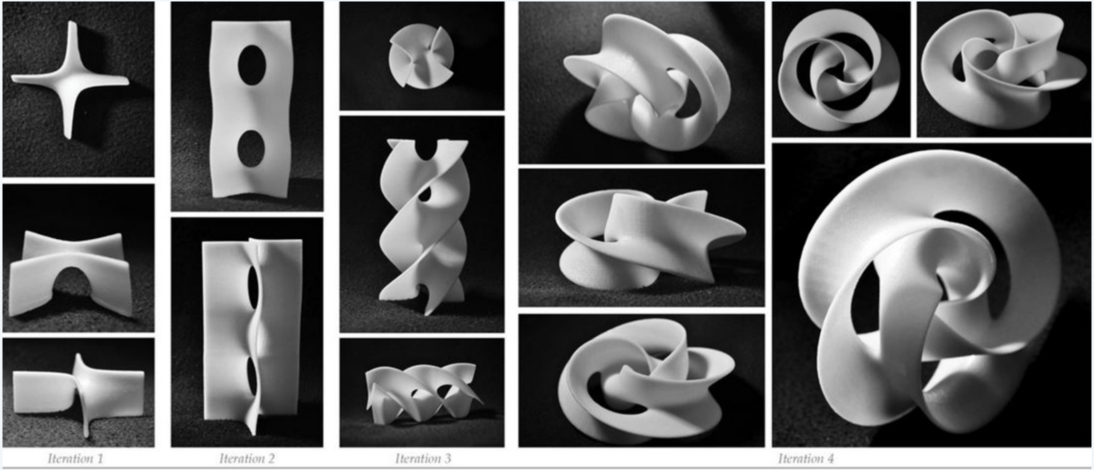
$\square$

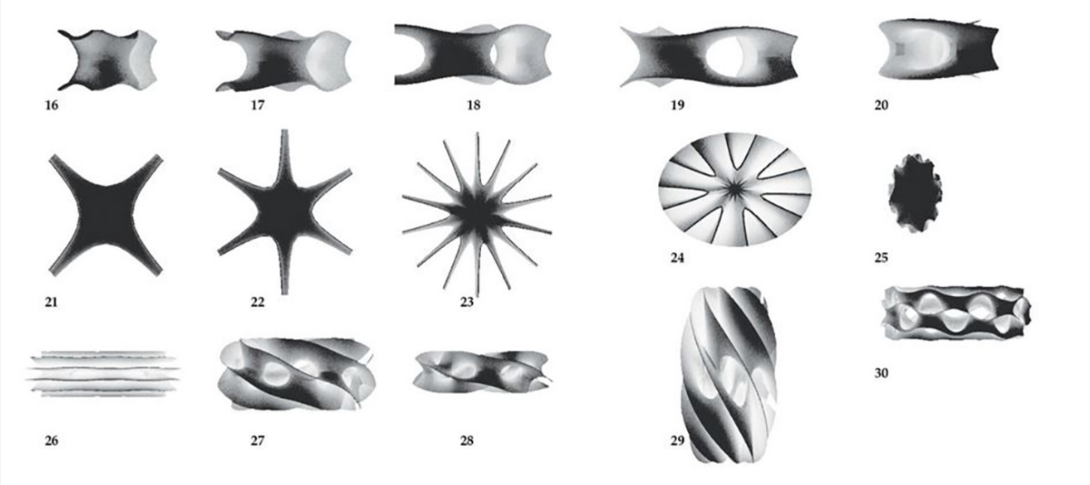
Algunas cosas más

Curiosidades

Particularmente utilizando el método de construcción de la primera superficie de Scherk, uno puede encontrar más superficies mínimas en otros cuadriláteros en el plano tanto euclideano como hyperbólico (llamadas superficies de Scherk Hyperbólicas). Esta propiedad fue utilizada en 2006 por Harold Rosenberg y Pascal Collin para desmentir la conjetura de Shoen-Yau

Las superficies de Scherk, por su periodicidad, y utilizando la parametrización de Enneper-Weierstraß, son comunmente manipuladas para realizar esculturas y ”familias de superficies mínimas generales”


Iteration 1
Iteration 2
Iteration 3
Iteration 4


16
17
18
19
20
21
22
23
24
25
26
27
28
29
30

Referencias

Magazine (2021)
Scherk's Minimal Surface
Parametric House https://parametrichouse.com/scherks-minimal-surface/

Michael Foster (2021)
Scherk Series
Breezy Hill Turning https://breezyhillturning.com/styled-2/page-3/index.html

S.L. Rueda (s.f.)
Superficies
Curvaturas y Superficies https://dma.aq.upm.es/profesor/rueda_s/srueda_archivos/CurvSup/Apuntes/superficies3.pdf

Claudia Magnapera (2017)
Minimal Surfaces, A Study
Università di Bologna https://amslaurea.unibo.it/13490/1/Minimal_surfaces__a_study%20(1).pdf

Eric Weisstein (s.f.)
Scherk's Minimal Surfaces
MathWorld–A Wolfram Web Resource. https://mathworld.wolfram.com/ScherksMinimalSurfaces.html

Wikipedia contributors (2023)
Scherk surface
Wikipedia https://en.wikipedia.org/wiki/Scherk_surface

Wikipedia-Autoren (2007)
Heinrich Ferdinand Scherk
Wikipedia https://de.wikipedia.org/wiki/Heinrich_Ferdinand_Scherk

Alex Verzea (2012)
Minimal Surfaces
MATH 580: Partial Differential Equations 1 https://www.math.mcgill.ca/gantumur/math580f12/minimal_surfaces.pdf

Gracias por su atención

María José Gil

Geometría Diferencial
Facultad de Matemática
Universidad del Valle de Guatemala

May 31, 2024