Superficie de Henneberg

Joshua Chicoj

Matemática aplicada
Universidad del Valle de Guatemala

Mayo, 2024

Contenido

Contenido

UVG
UNIVERSIDAD DEL VALLE DE GUATEMALA

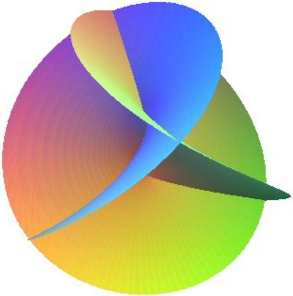
Ernst Lebrectch Henneberg

Nació en Wolfenbüttel, Alemania en 1850. Desde 1870 a 1875 se dedicó a estudiar metemáticas en Berlin, Heidelberg y Zürich, ciudad en la cual Hermann Schwarz le otorgó su doctorado. Durante 1875 Henneberg estudió la superficie que lleva su nombre, la cual presentó como la primera superficie mínima y algebraica. Sin embargo, se sabe que Catalan ya conocía la superficie de Henneberg desde 1858.

Contenido

UVG
UNIVERSIDAD DEL VALLE DE GUATEMALA

Parametrización



La superficie de Henneberg puede parametrizarse de la forma

$$x = 2\sinh(u)\cos(v) - \frac{2}{3}\sinh(3u)\cos(3v)$$
$$y = 2\sinh(u)\sin(v) - \frac{2}{3}\sinh(3u)\sin(3v)$$
$$z = 2\cosh(2u)\cos(2v)$$

Superficie mínima

Tomemos los coeficientes de la primera forma fundamental

$$
\begin{aligned}
E &= 8\cosh^2 u\,[\cosh(4u) - \cos(4v)] \\
F &= 0 \\
G &= 8\cosh^2 u\,[\cosh(4u) - \cos(4v)]
\end{aligned}
$$

y los coeficientes de la segunda forma fundamental

$$
\begin{aligned}
e &= -4\cos(2v)\sinh(2u) \\
f &= 4\cosh(2u)\sin(2v) \\
g &= 4\cos(2v)\sinh(2u)
\end{aligned}
$$

UVG
UNIVERSIDAD
DEL VALLE
DE GUATEMALA

Superficie mínima

Notemos que $E = G, e = -g$. Entonces

$$\begin{aligned} H &= \frac{eG - 2fF + gE}{2(EG - F^2)} \\ &= \frac{eG - 2fF + (-eG)}{2(G^2 - F^2)} \\ &= -\frac{2fF}{2(G^2 - F^2)} \\ &= -\frac{0}{2G^2} \\ &= 0 \end{aligned}$$

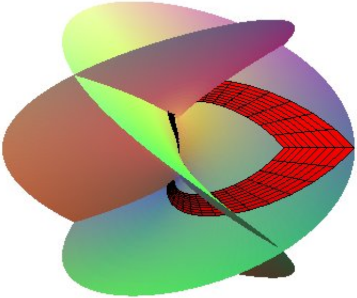
Por lo tanto, la superficie de Henneberg es mínima

Contenido

UVG
UNIVERSIDAD
DEL VALLE
DE GUATEMALA

Propiedades

- Constituye un modelo del plano proyectivo, por lo tanto es no orientable y podemos trazar una cinta de Möbius sobre la superficie



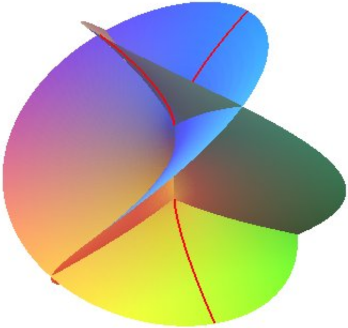
UVG
UNIVERSIDAD DEL VALLE DE GUATEMALA

Problema de Björling

Emanuel
Björling fue un matemático suizo del siglo XVII. Propuso y resolvió el siguiente problema: Dada una curva analítica $\gamma(t)$ y el campo analítico de vectores $v(t)$ al rededor de $\gamma(t)$ tal que $v(t)$ es ortogonal a $\gamma'(t)$, encuentre una superficie minima que contenga la curva γ y tenga a $v(t)$ como vector normal al rededor de $\gamma(t)$

Propiedades

- Haciendo $v = 0$, obtenemos una parábola semicúbica con ecuación $(z-2)^3 = 18x^2, y = 0$ la cual es una geodésica de la superficie de Henneberg. Esto la hace una superficie de Björling asociada a una parábola semicúbica



Parametrización de Weirstrass-Enneper

Es posible generar una parametrización de Weirstrass-Enneper tomando $f(z) = \frac{e^{2i}\left(1-\frac{1}{z^4}\right)}{2}, g(z) = z$

$$\begin{cases} x = e^u \cos(v+2) - e^{-u}\cos(v-2) - \frac{e^{3u}\cos(3v+2) - e^{-3u}\cos(3v-2)}{3} \\ y = -e^u \sin(v+2) + e^{-u}\sin(v-2) - \frac{e^{3u}\sin(3v+2) + e^{-3u}\cos(3v-2)}{3} \\ z = e^{2u}\cos(2v+2) - e^{-2u}\cos(2v-2) \end{cases}$$

Referencias

- MathCurve. (n.d.). *Henneberg Surface*. Retrieved from https://mathcurve.com/surfaces.gb/henneberg/henneberg.shtml
- MathCurve. (n.d.). *Plan Projectif*. Retrieved from https://mathcurve.com/surfaces.gb/planprojectif/planprojectif.shtml
- MathCurve. (n.d.). *Bonnet Croisé*. Retrieved from https://mathcurve.com/surfaces.gb/bonnetcroise/bonnetcroise.shtml
- Virtual Math Museum. (n.d.). *Henneberg Surface*. Retrieved from https://virtualmathmuseum.org/Surface/henneberg/henneberg.html

Referencias

- Wikipedia contributors. (n.d.). *Henneberg surface*. In *Wikipedia, The Free Encyclopedia*. Retrieved from https://en.wikipedia.org/wiki/Henneberg_surface
- Sun, X. (2022). *On the Henneberg Surface and its Relation to the Björling Problem*. arXiv. Retrieved from https://arxiv.org/pdf/2207.01099
- MathWorld. (n.d.). *Henneberg's Minimal Surface*. Retrieved from https://mathworld.wolfram.com/HennebergsMinimalSurface.html

UVG
UNIVERSIDAD DEL VALLE DE GUATEMALA