

El Catenóide y el Helicóide Historia y Propiedades

Guillermo Alfonso Furlán Estrada



Universidad del Valle de Guatemala
Licenciatura en Matemáticas Aplicadas

Mayo de 2024

Contenido

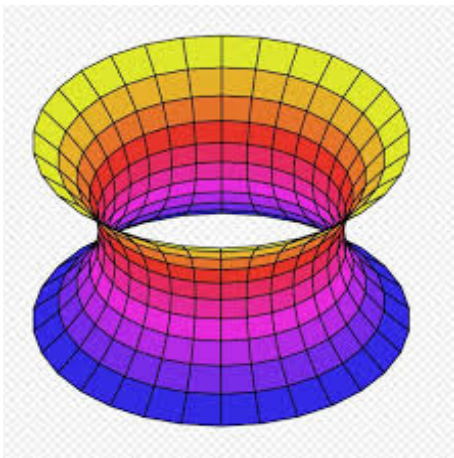
- 1 Conceptos Básicos del Catenoide
- 2 Conceptos Básicos del Helicoide
- 3 Superficies Mínimas
- 4 Otras Propiedades
- 5 Referencioas

Contenido

- 1 Conceptos Básicos del Catenoide
- 2 Conceptos Básicos del Helicoide
- 3 Superficies Mínimas
- 4 Otras Propiedades
- 5 Referencioas

El Catenoide

Una catenoide es una superficie que se forma al hacer girar una catenaria alrededor de su eje. Una catenaria es la curva que se forma cuando cuelgas una cadena o cable sujeto en sus extremos, y una catenoide es la forma tridimensional que obtienes al girar esa curva alrededor de un eje recto.



Historia

- Christiaan Huygens en el siglo XVII describió la curva que describe una cadena colgante llamándola catenaria.



- El catenoide fue descubierto en 1744 por el matemático suizo Leonhard Euler. Siendo la primera superficie mínima descubierta.



$$x(u, v) = (a \cos(u) \cdot \cosh(v), a \sin(u) \cdot \cosh(v), v),$$

donde $u, v \in \mathbf{R}$

Con la parametrización dada

$$x(u, v) = (a \cos(u) \cosh(v), a \sin(u) \cosh(v), v),$$

$$x_u = (-a \sin(u) \cosh(v), a \cos(u) \cosh(v), 0)$$

$$x_v = (a \cos(u) \sinh(v), a \sin(u) \sinh(v), a)$$

$$x_{uu} = (-a \cos(u) \cosh(v), -a \sin(u) \cosh(v), 0)$$

$$x_{uv} = (-a \sin(u) \sinh(v), a \cos(u) \sinh(v), 0)$$

$$x_{vv} = (a \cos(u) \cosh(v), a \sin(u) \cosh(v), 0)$$

Primera forma fundamental

$$\langle x_u, x_u \rangle = (-a \sin(u) \cosh(v))^2 + (a \cos(u) \cosh(v))^2 + 0^2 = a^2 \cosh^2(v)$$

$$\begin{aligned} \langle x_u, x_v \rangle &= (-a \sin(u) \cosh(v))(a \cos(u) \sinh(v)) + \\ &+ (a \cos(u) \cosh(v))(a \sin(u) \sinh(v)) + 0 \cdot 1 = 0 \end{aligned}$$

$$\langle x_v, x_v \rangle = (a \cos(u) \sinh(v))^2 + (a \sin(u) \sinh(v))^2 + a^2 = a^2 \sinh^2(v) + a^2$$

Entonces, la primera forma fundamental es:

$$E = a^2 \cosh^2(v)$$

$$F = 0$$

$$G = a^2 \sinh^2(v) + a^2 = a^2 \cosh^2(v)$$

Se requiere calcular el vector normal unitario:

$$\mathbf{n} = \frac{\mathbf{x}_u \times \mathbf{x}_v}{\|\mathbf{x}_u \times \mathbf{x}_v\|} = \frac{((-a \cos(u) \cosh(v), -a \sin(u) \cosh(v), -a \cos(u) \sinh(v)))}{\sqrt{a^2 \cosh^2(v) + a^2 \sinh^2(v)}} = \frac{(-\cos(u) \cosh(v), -\sin(u) \cosh(v), -\cosh(u) \sinh(v))}{\cosh(v)}$$

Segunda forma fundamental

$$\langle x_{uu}, \mathbf{n} \rangle = (-a \cos(u) \cosh(v)) \cdot (-\cos(u) \cosh(v)) + (-a \sin(u) \cosh(v)) \cdot (-\sin(u) \cosh(v)) - 0 \cdot \cosh(u)$$

$$\langle x_{uv}, \mathbf{n} \rangle = (-a \sin(u) \sinh(v)) \cdot (-\cos(u) \cosh(v)) + (a \cos(u) \sinh(v)) \cdot (-\sin(u) \cosh(v)) - 0 \cdot \cosh(u)$$

$$\langle x_{vv}, \mathbf{n} \rangle = (a \cos(u) \cosh(v)) \cdot (-\cosh(u) \sinh(v)) + (a \sin(u) \cosh(v)) \cdot (-\sinh(u) \sinh(v)) - 0 \cdot \cosh(u)$$

Realizando los cálculos:

$$e = -a \cos(u)$$

$$f = 0$$

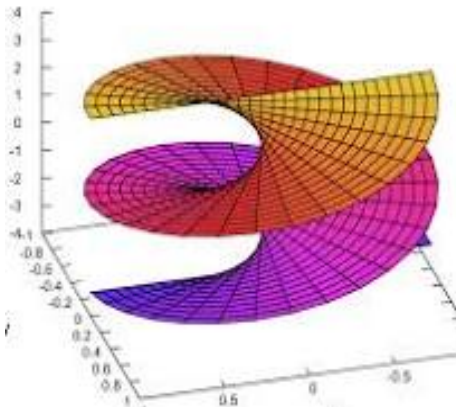
$$g = -a \cos(u)$$

Contenido

- 1 Conceptos Básicos del Catenoide
- 2 Conceptos Básicos del Helicoide**
- 3 Superficies Mínimas
- 4 Otras Propiedades
- 5 Referencoas

El Helicoide

Una helicoide es una superficie que se origina al rotar una línea helicoidal alrededor de su eje. Esta línea helicoidal, también conocida como hélice, es la trayectoria que resulta al colgar una cadena o cable sujeto en sus extremos. La helicoide se forma al girar esta curva en tres dimensiones alrededor de un eje recto.



Fue descrita por Euler en 1774 y por Jean Baptiste Meusnier en 1776.



Figura: Meusnier



Figura: Euler

$$x(u, v) = (v \cdot \cos(u), v \cdot \sin(u), u)$$

donde $u, v \in \mathbf{R}$, a una constante

Con la parametrización $x(u, v) = (v \cdot \cos(u), v \cdot \sin(u), u)$

$$x_u = (-v \cdot \sin(u), v \cdot \cos(u), 0)$$

$$x_v = (\cos(u), \sin(u), 1)$$

$$x_{uu} = (-v \cdot \cos(u), -v \cdot \sin(u), 0)$$

$$x_{uv} = (\sin(u), -\cos(u), 0)$$

$$x_{vv} = (0, 0, 0)$$

Primera forma fundamental

$$E = \langle x_u, x_u \rangle = (-v \cdot \sin(u))^2 + (v \cdot \cos(u))^2 + 0^2 = v^2$$

$$F = \langle x_u, x_v \rangle = (-v \cdot \sin(u)) \cdot \cos(u) + (v \cdot \cos(u)) \cdot \sin(u) + 0 \cdot 1 = 0$$

$$G = \langle x_v, x_v \rangle = (\cos(u))^2 + (\sin(u))^2 + 0 = 1$$

Por lo tanto, la primera forma fundamental para esta parametrización es:

$$E = v^2$$

$$F = 0$$

$$G = 1$$

$$\mathbf{n} = \left(\frac{-\sin(u)}{\sqrt{1+v^2}}, \frac{\cos(u)}{\sqrt{1+v^2}}, \frac{-v}{\sqrt{1+v^2}} \right)$$

Segunda forma fundamental

$$e = \mathbf{x}_{uu} \cdot \mathbf{n} = (-v \cos(u), -v \sin(u), 0) \cdot \left(\frac{-\sin(u)}{\sqrt{1+v^2}}, \frac{\cos(u)}{\sqrt{1+v^2}}, \frac{-v}{\sqrt{1+v^2}} \right) = 0$$

$$f = \mathbf{x}_{uv} \cdot \mathbf{n} = (-\sin(u), \cos(u), 0) \cdot \left(\frac{-\sin(u)}{\sqrt{1+v^2}}, \frac{\cos(u)}{\sqrt{1+v^2}}, \frac{-v}{\sqrt{1+v^2}} \right) = \frac{-1}{\sqrt{1+v^2}}$$

$$g = \mathbf{x}_{vv} \cdot \mathbf{n} = (0, 0, 0) \cdot \left(\frac{-\sin(u)}{\sqrt{1+v^2}}, \frac{\cos(u)}{\sqrt{1+v^2}}, \frac{-v}{\sqrt{1+v^2}} \right) = 0$$

Por lo tanto, la segunda forma fundamental para esta parametrización es:

$$e = 0$$

$$f = -\frac{v}{\sqrt{v^2 + 1}}$$

$$g = 0$$

Contenido

- 1 Conceptos Básicos del Catenoide
- 2 Conceptos Básicos del Helicoide
- 3 Superficies Mínimas**
- 4 Otras Propiedades
- 5 Referencoas

Parametrización Isotérmica

Recordemos que una parametrización es isotérmica si $E = G$ y $F = 0$, donde estas son las primeras formas fundamentales. Además, una función es armónica si su laplaciano es 0.

Entonces, recordemos que por teorema una superficie es mínima si y solo si las funciones coordenadas $x(u, v)$, $y(u, v)$, $z(u, v)$ son funciones armónicas, cuando se consideran en parámetros isotérmicos (u, v) .

Recordemos que la curvatura gaussiana y media son:

$$H = \frac{1}{2} \frac{eG - 2fF + gE}{EG - F^2}, \quad K = \frac{eg - f^2}{EG - F^2}$$

y por definición de superficie mínima, una superficie es mínima si $H = 0$.

Nótese que para el catenoide:

- ① $\nabla X(u, v) = -a \cos(u) \cosh(v) + a \cos(u) \cosh(v) = 0$
- ② $\nabla Y(u, v) = -a \sin(u) \cosh(v) + a \sin(u) \cosh(v) = 0$
- ③ $\nabla Z(u, v) = 0 + 0 = 0$

Además, la parametrización propuesta es isotérmica por las primeras formas fundamentales, entonces el catenoide es una superficie mínima.

Nótese que al tener el helicoide $e = 0$, $g = 0$ y $F = 0$, su curvatura media es 0, por lo que es una superficie mínima.

Contenido

- 1 Conceptos Básicos del Catenoide
- 2 Conceptos Básicos del Helicoide
- 3 Superficies Mínimas
- 4 Otras Propiedades**
- 5 Referencoas

El catenoide es la única superficie de revolución que es a su vez superficie mínima. (Prueba: Ver ejemplo 5, página 205 de Do Carmo.)

La idea es mostrar que para que una superficie de revolución sea mínima, la base debe ser una catenaria.

Teorema de clasificación de Meeks y Rosenberg

Una superficie mínima simplemente conexa y encrustada propiamente en $\mathbf{R}^3$ es o bien un plano o bien un helicoides.

Este teorema es significativo porque reduce la clasificación de superficies mínimas simplemente conexas y embebidas propiamente a solo dos tipos de superficies: planos y helicoides. Cualquier otra forma que cumpla las condiciones del teorema debe ser una de estas dos formas, lo cual es una restricción poderosa en la teoría de superficies mínimas.

Isometria entre superficies

Sean S_1 y S_2 dos superficies en $\mathbb{R}^3$. Decimos que S_1 y S_2 son *localmente isométricas* si para cada punto $p \in S_1$ existe una vecindad $U \subset S_1$ de p y una vecindad $V \subset S_2$ de un punto $q \in S_2$ y una aplicación diferenciable $f : U \rightarrow V$ tal que:

1. f es diferenciable y tiene un inverso diferenciable. 2. La primera forma fundamental se preserva bajo f , es decir, si I_1 y I_2 son las primeras formas fundamentales de S_1 y S_2 respectivamente, entonces para todos los vectores tangentes X, Y en $T_p S_1$, tenemos:

$$I_1(X, Y) = I_2(f_*(X), f_*(Y)),$$

donde f_* denota el diferencial de f .

Teorema: El catenoide y el Helicoide son localmente isometricos enlance

- 1 Conceptos Básicos del Catenoide
- 2 Conceptos Básicos del Helicoide
- 3 Superficies Mínimas
- 4 Otras Propiedades
- 5 Referencoas**

- ① Pérez de Diego, B. (2019). Minimal surfaces: A study. Recuperado de este enlace.
- ② Britannica. (s.f.). Catenary. Recuperado de este enlace.
- ③ Università di Bologna. (2019). Minimal surfaces: A study. recuperado de este enlace.pdf).
- ④ Schoen, R., Wolfson, J. (2005). Minimizing area among tori with fixed boundary. Annals of Mathematics, 161(2), 815-843.
Recuperado de este enlace
- ⑤ Minimizing area among Lagrangian surfaces: the mapping problem, Choen, Richard and Wolfson, Jon, Annals of Mathematics, 161, 2, 815–843, enlace