

Superficie de Enneper

Ana Sofía Escobar

Universidad del Valle de Guatemala
Facultad de Ciencias y Humanidades
Geometría Diferencial



28 de mayo de 2024

- 1 Datos históricos
- 2 Parametrizaciones
- 3 Superficie Minima
- 4 Propiedades
- 5 Referencias

Alfred Enneper

- Alfred Enneper (1830-1885) fue un matemático alemán conocido por su trabajo en el área de las superficies mínimas.
- Estudió el doctorado en la Universidad de Göttingen bajo la supervisión de Peter Gustav Lejeune Dirichlet en 1856.
- Enneper desarrolló una parametrización especial para las superficies mínimas, conocida como la parametrización de Weierstrass-Enneper.



Figura 1: Enter Caption

Alfred Enneper - Contribuciones más importantes

- Junto con Karl Weierstrass, contribuyó a la creación de una familia de parametrizaciones para superficies mínimas. La representación de Weierstrass-Enneper es una de las más importantes y utilizadas en la teoría de superficies mínimas.
- Enneper también es conocido por el Teorema de Beltrami-Enneper, que establece una relación entre la torsión y la curvatura de Gauss en curvas asintóticas de curvatura no nula.

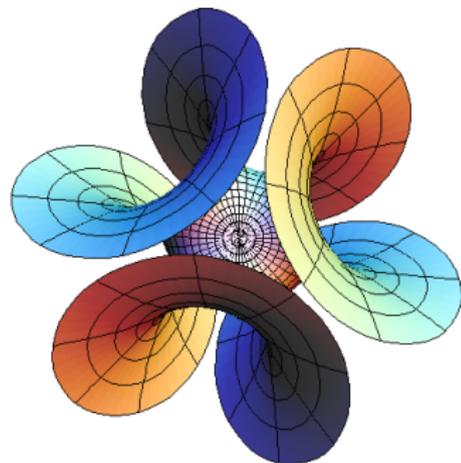


Figura 2: Superficie de Enneper

Parametrización Weierstrass-Enneper

La parametrización de Weierstrass-Enneper se usa para describir superficies mínimas en términos de funciones complejas. Sea f una función meromorfa y g una función analítica en el plano complejo, en donde el producto fg^2 es holomorfo, entonces la superficie mínima correspondiente está dada por:

$$x_k(\zeta) = \Re \left\{ \int_0^\zeta \varphi_k(z) dz \right\} + c_k, \quad k = 1, 2, 3$$

$$\varphi_1 = \frac{f(1 - g^2)}{2}$$

$$\varphi_2 = \frac{if(1 + g^2)}{2}$$

$$\varphi_3 = fg$$

Parametrización Weierstrass-Enneper

A partir de sustituir en esta parametrización $f(z) = 1$, $g(z) = z$ podemos encontrar una parametrización para la superficie de Enneper:

$$x_k(\zeta) = \Re \left\{ \int_0^\zeta \varphi_k(z) dz \right\} + c_k, \quad k = 1, 2, 3$$

$$\varphi_1 = \frac{(1 - z^2)}{2}$$

$$\varphi_2 = \frac{i(1 + z^2)}{2}$$

$$\varphi_3 = z$$

La superficie puede ser generalizada al tomar $f(z) = 1$ y $g(z) = z^{n-1}$

Parametrización de \mathbb{R}^2 en \mathbb{R}^2

La superficie de Enneper se auto-intersecciona en algunas ocasiones, lo que añade complejidad a su estructura geométrica. Sin embargo, esta parametrización facilita la graficación de la superficie de Enneper:

$$x(u, v) = \left(u - \frac{u^3}{3} + uv^2, v - \frac{v^3}{3} + vu^2, u^2 - v^2 \right)$$

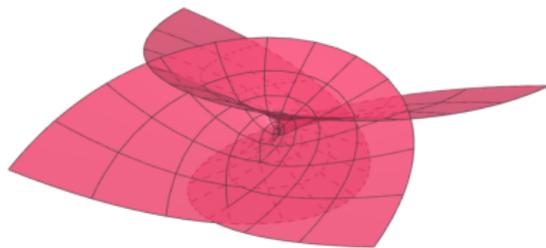


Figura 3: Parametrización de \mathbb{R}^2 en \mathbb{R}^2

Parametrización Cartesiana

En coordenadas cartesianas, una superficie mínima se puede parametrizar utilizando funciones de dos variables. En este caso la superficie de Enneper se puede describir como:

$$x = a \left(r \cos t - \frac{r^3}{3} \cos 3t \right)$$

$$y = a \left(r \sin t + \frac{r^3}{3} \sin 3t \right)$$

$$z = ar^2 \cos 2t$$

Esta representación explícita es útil para visualizar la superficie y entender su estructura geométrica.

Relación entre las parametrizaciones

Las parametrizaciones pueden relacionarse unas a otras tras hacer las sustituciones recomendadas en la página 6:

$$\begin{aligned}x &= \Re \int_0^{u+vi} (1 - t^2) dt = \Re \left(\frac{t - t^3}{3} \Big|_0^{u+vi} \right) \\&= \Re \left(u + vi - \frac{u^3 + 3u^2vi - 3uv^2 - v^3i}{3} \right) = \left(u - \frac{u^3}{3} + uv^2 \right) \\y &= \Re i \int_0^{u+vi} (1 + t^2) dt = \Re i \left(\frac{t + t^3}{3} \Big|_0^{u+vi} \right) \\&= \Re i \left(ui - v + \frac{u^3i - 3u^2v - 3uv^2i + v^3}{3} \right) = \left(-v + \frac{v^3}{3} - u^2v \right) \\z &= \Re \int_0^{u+vi} 2t dt = \Re \left(t^2 \Big|_0^{u+vi} \right) = \Re (u^2 + 2uvi - v^2) = (u^2 - v^2)\end{aligned}$$

Para que la superficie es mínima tomaremos el camino probando las propiedades del siguiente corolario:

Corolario

$S \subset \mathbb{R}^3$ es una superficie mínima si y solo si las funciones coordenadas $x(u, v)$, $y(u, v)$, $z(u, v)$ son funciones armónicas, cuando se consideran en parámetros isotérmicos (u, v) .

Entonces, a probar:

- Armónica: $x_{uu}(u, v) + x_{vv}(u, v) = 0$
- Isotérmico: $E=G$ y $F=0$

Obteniendo las derivadas de la parametrización de \mathbb{R}^2 en \mathbb{R}^2 notamos que:

$$x_u = (1 - u^2 + v^2, 2uv, 2u)$$

$$x_v = (2uv, 1 - v^2 + u^2, -2v)$$

$$x_{uu} = (-2u, 2v, 2)$$

$$x_{vv} = (2v, -2u, -2)$$

En donde se observa que x_{uu} es el negativo de x_{vv} y viceversa, por lo que $x_{uu}(u, v) + x_{vv}(u, v) = 0$, y se demuestra que $x(u, v)$ es armónica.

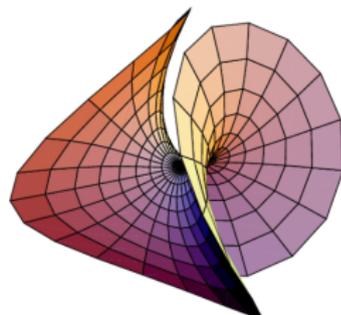


Figura 4: Superficie de Enneper

Primera forma fundamental

Utilizando la parametrización vista de \mathbb{R}^2 en \mathbb{R}^2 podemos obtener:

$$\begin{aligned} E &= x_u \cdot x_u = (1 - u^2 + v^2)^2 + 4u^2v^2 + 4u^2 \\ &= 1 + u^4 + v^4 + 2u^2 + 2v^2 + 2u^2v^2 = (1 + u^2 + v^2)^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} G &= x_v \cdot x_v = (1 - v^2 + u^2)^2 + 4u^2v^2 + 4v^2 \\ &= 1 + u^4 + v^4 + 2u^2 + 2v^2 + 2u^2v^2 = (1 + u^2 + v^2)^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} F &= x_u \cdot x_v = 2uv(1 - u^2 + v^2) + 2uv(1 + v^2 - u^2) - 4uv \\ &= 2uv(1 - u^2 + v^2 + 1 - v^2 + u^2 - 2) = 2uv \cdot 0 = 0 \end{aligned}$$

Con lo que se demuestra que $E=G$ y $F=0$ y entonces la parametrización es isotérmica y por lo tanto la superficie de Enneper es mínima.

Curvatura media y gaussiana

En una superficie mínima sabemos que la curvatura media debe de ser cero, entonces:

$$H = \frac{eG - 2fF + gE}{2(EG - F^2)} = \frac{2(1 + u^2 + v^2)^2 - 2(0)(0) - 2(1 + u^2 + v^2)^2}{2((1 + u^2 + v^2)^4 - 0^2)} = 0$$

También podemos encontrar la curvatura gaussiana, pero primero debemos encontrar los coeficientes de la segunda forma fundamental:

$$n = \frac{x_u \times x_v}{|x_u \times x_v|} = \frac{1}{(1 + u^2 + v^2)^2}$$

$$\Rightarrow e = \mathbf{n} \cdot x_{uu} = 2, \quad g = \mathbf{n} \cdot x_{vv} = -2, \quad f = \mathbf{n} \cdot x_{uv} = 0$$

Entonces, calculando la curvatura obtenemos:

$$K = \frac{eg - f^2}{EG - F^2} = \frac{2(-2) - 0^2}{(1 + u^2 + v^2)^4 - 0^2} = \frac{-4}{(1 + u^2 + v^2)^4} < 0$$

Tipos de curvas en la superficie

Las dos secciones o curvas de la superficie de Enneper por sus planos de simetría son cúbicas de Tschirnhausen. También cumplen la propiedad de ser geodésicas (curvas representan las trayectorias más cortas entre puntos en la superficie).

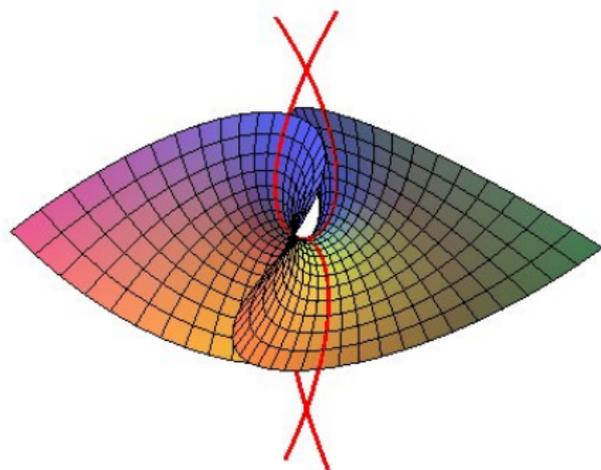


Figura 5: Secciones cúbicas

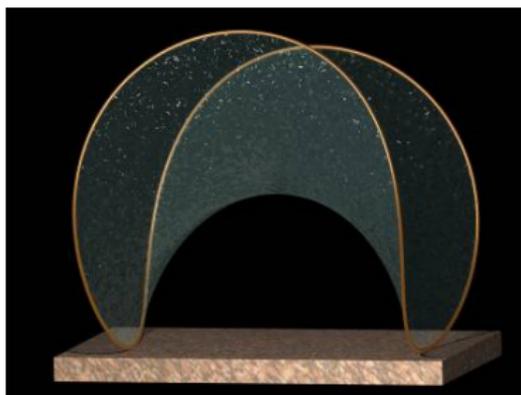


Figura 6: Simulación de jabón

Teóricamente, una superficie de Enneper puede materializarse teóricamente al sumergir la línea de costura de una pelota de tenis en una solución jabonosa para obtener una fina capa de jabón.

Sin embargo, en la práctica, lograr esta transformación puede ser complicado debido a la necesidad de un movimiento brusco preciso.



Figura 7: Simulación de Jabón en una superficie de enneper con $n=5$

Datos Curiosos

Los Flatworms, también conocidos como gusanos planos, son una clase de animales invertebrados que pertenecen al filo Platyhelminthes. Estos organismos acuáticos o terrestres tienen cuerpos aplanados y simples, sin cavidades corporales. Su anatomía les permite moverse de manera eficiente a través del agua o del suelo, y algunos incluso son capaces de regenerar partes de su cuerpo en caso de daño o amputación.



Figura 8: Flatworm (Gusanos Planos)



Figura 9: Flatworm (Gusanos Planos)

La flexibilidad y curvatura variable de los Flatworms les permite adaptarse a su entorno de manera eficaz, lo que los hace comparables con las superficies de Enneper en diversos parámetros n . Al igual que los Flatworms pueden ajustar su forma y curvatura para responder a estímulos externos, las superficies de Enneper exhiben diferentes configuraciones geométricas según el valor de n .

¿Preguntas?

Referencias

- [1] Robert Ferreol. (2017). Enneper Surface. Recuperado de <https://mathcurve.com/surfaces.gb/enneper/enneper.shtml>
- [2] Weisstein, Eric W. . "Enneper's Minimal Surface." From MathWorld—A Wolfram Web Resource. Recuperado de <https://mathworld.wolfram.com/EnnepersMinimalSurface.html>
- [3] Wikipedia. (s.f.). Enneper Surface. Recuperado de https://en.wikipedia.org/wiki/Enneper_surface
- [4] Desconocido. (s.f.). Enneper Surfaces and the Search for Alternatives in the Manufacturing of Soaps. Recuperado de <https://scholarworks.lib.csusb.edu/cgi/viewcontent.cgi?article=2228&context=etd>