Superficie de Costa

Wilfredo Gallegos - 20399

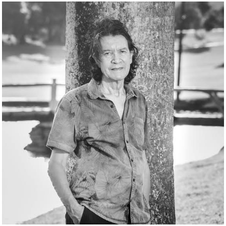
Universidad del Valle de Guatemala
Geometría Diferencial

30 de mayo de 2024

Tabla de contenido

Celso José da Costa

- Matemático Brasileño
- Comendador de la Orden Nacional del Mérito Científico
- Presidencia de la República de Brasil 1998
- Doctorado en el Instituto de Matemática Pura y Aplicada (IMPA) de Río de Janeiro en diciembre de 1982, con una tesis sobre geometría diferencial
- Su desarrollo matemático se centra en la construcción y clasificación de superficies completas mínimas inmersas en un espacio euclidiano tridimensional



Contexto Histórico

Una de las superficies minimales más interesantes fue definida por Celso Costa en 1982, para luego, dos años más tarde, los matemáticos Hoffman y Meeks demostraran que la Superficie de Costa es una superficie completa incrustable.

Otro dato interesante de la superficie de Costa, es que es una superficie minimal periódica junto a la superficie de Karcher-Meeks-Rosenberg. Además, que esta superficie es de la primera superficie homeomorfa a un toro con 3 agujeros y Genus 1.

Contexto Histórico

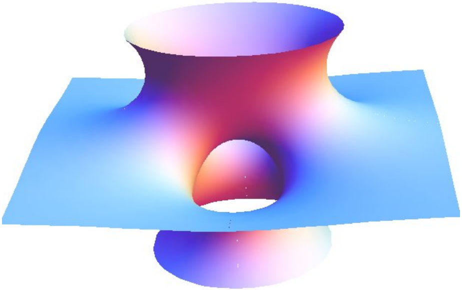


Figura: Superficie minimal de Costa

Funciones $\wp$ y ζ de Weierstrass

Antes de presentar la parametrización de la superficie de Costa es necesario definir las siguientes dos funciones conocidas como las funciones $\wp$ y ζ de Weierstrass, tomemos dos números complejos ω_1 y ω_2, ambos distintos a cero de tal forma que $\Im(\omega_1/\omega_2) > 0$, con los que definimos el retículo $\mathcal{L} \subset \mathbb{C}$ como

$$\mathcal{L} = \{m\omega_1 + n\omega_2 : \ m, n \in \mathbb{Z}\}$$

De esta manera definimos las funciones $\wp$ y ζ de Weierstrass como

función $\wp$

$$\wp(z) = \wp(z, \omega_1, \omega_2) = \frac{1}{z^2} + \sum_{\omega \neq 0} \left(\frac{1}{(z-\omega)^2} - \frac{1}{\omega^2} \right), \ \omega \in \mathcal{L}$$

función ζ

$$\zeta(z) = \zeta(z, \omega_1, \omega_2) = \frac{1}{z} + \sum_{\omega \neq 0} \left(\frac{1}{z-\omega} + \frac{1}{\omega} + \frac{z}{\omega^2} \right), \ \omega \in \mathcal{L}$$

Propiedades y representaciones de las funciones $\wp$ y ζ

Para la parametrización de la superficie minimal de Costa, es necesario aclarar el uso de las funciones ϕ y ψ, definidas de la siguiente forma,

$$\phi(z) = \mathrm{P}(z) \qquad y \qquad \psi = \frac{\sqrt{2\pi}2\wp(1/2)}{\mathrm{P}'(z)}$$

Propiedades

para todo ω se cumple que

1. $\mathrm{P}\left(z - \frac{1}{2}\right) - \mathrm{P}\left(z - \frac{i}{2}\right) - 2\wp(\frac{\omega_1}{2}) = \frac{16 \cdot \wp(\frac{\omega_1}{2})^3 \mathrm{P}(z)}{\mathrm{P}'(z)^2}$
2. $i\mathrm{Z}(iz) = \mathrm{Z}(z)$
3. $\mathrm{Z}\left(\frac{1}{2}\right) = i\mathrm{Z}\left(\frac{i}{2}\right) = \frac{\pi}{2}$
4. $\mathrm{Z}\left(\frac{1+i}{2}\right) = \frac{(1-i)\pi}{2}$

Donde, $\mathrm{P}(z) = \wp(z, c, 0)$, $\mathrm{Z}(z) = \zeta(z, c, 0)$ y donde c $\approx$ 189.07272. De esta manera aseguramos que la superficie mimimal de Costa no tiene auto-intersecciones

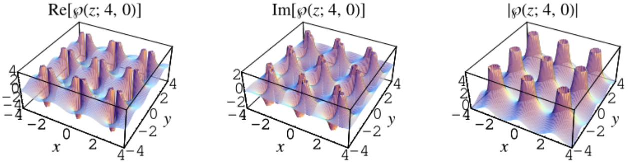


Figura: Representación visual de la funcion $\wp$ de Weierstrass

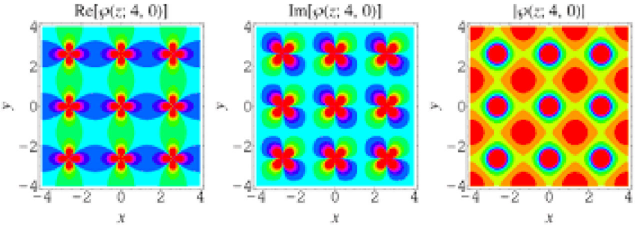


Figura: Representación de contorno de la función $\wp$ de Weierstrass

Representación visual de la función ζ

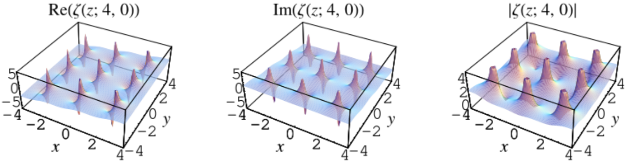


Figura: Representación visual de la funcion ζ de Weierstrass

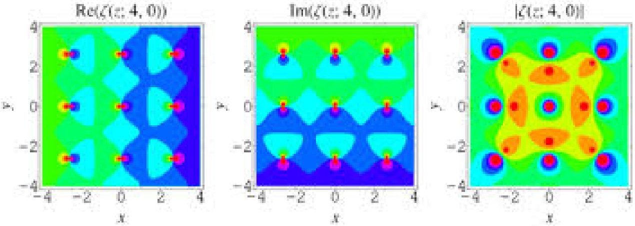


Figura: Representación de contorno de la función ζ de Weierstrass

Representación de Weierstrass

Definición

La curva minimal de costa es la curva meromorfa *Costamincurve* : $\mathbb{C} \to \mathbb{C}^3$ la cual, en función de $\wp$ se define como

$$\begin{aligned} \mathcal{C}_x = & \ \Re \int \tfrac{1}{4}\phi(z)\left(1 - \psi(z)^2\right) dz \\ \mathcal{C}_y = & \ \Re \int \tfrac{i}{4}\phi(z)\left(1 + \psi(z)^2\right) dz \\ \mathcal{C}_z = & \ \Re \int \tfrac{1}{2}\phi(z)\psi(z) dz \end{aligned}$$

Esta es una forma de definir la superficie minimal de Costa, utilizando la funcion $\wp$ de Weierstrass, la cual fue dada por Lucas Barbosa y Gervasio Corales en el año 1986 en el texto "Minimal Surfaces in R^2, pero para evitar la parte integratoria y simplificar la expresión es necesario el uso de la función ζ de Weierstrass en para la representación.

Parametrización de Gray

De manera, para evitar las integrales complejas de la representación de Weierstrass, Alfred Gray propuso otra parametrización de la superficie en 1996, utilizando las funciones $\wp$ y ζ, indicando que la superficie minimal de Costa está dada por:

$$Costa(u, v) = (Costa_x(u, v), Costa_y(u, v), Costa_z(u, v))$$

Parametrización de Gray

$$\begin{aligned}
Costa_x(u, v) = & \quad \frac{1}{2}\Re\left(-\zeta(z) + \pi u + \frac{\pi^2}{4\wp(\omega_1)} + \frac{\pi}{2\wp(\omega_1)}[\zeta(z-\omega_1) - \zeta(z-\omega_2)]\right) \\
Costa_y(u, v) = & \quad \frac{1}{2}\Re\left(-i\zeta(z) + \pi v + \frac{\pi^2}{4\wp(\omega_1)} - \frac{\pi}{2\wp(\omega_1)}[i\zeta(z-\omega_1) - i\zeta(z-\omega_2)]\right) \\
Costa_z(u, v) = & \quad \frac{1}{4}\sqrt{2\pi}\ln\left|\frac{\wp(z)-\wp(\omega_1)}{\wp(z)+\wp(\omega_1)}\right|
\end{aligned}$$

Propiedades de la Superficie de Costa

1. La superficie de Costa es invariante bajo el reflejo respecto a x=y con z=0. Dado este reflejo de media vuelta, las dos caras de la superficie son intercambiadas.

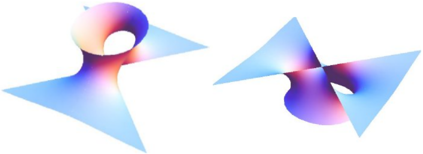


Figura: Invarianza de las caras de la superficie bajo reflejo

2. La superficie de Costa es topológicamente equivalente a un toro menos 3 puntos.

Propiedades de la Superficie de Costa

3. La superficie de Costa es topológicamente cercana a la superficie cúbica algebraica definida con la ecuación Cartesiana: $(x^2 + y^2 - a^2)z = a(x^2 - y^2)$ la cual tambien es invariante bajo el reflejo de media vuelta.

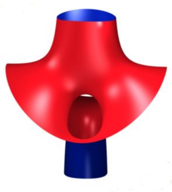


Figura: Superficie cúbica algebráica

4. 4 La superficie de Costa se puede generalizar a una superficie con orden n simetría rotacional.

Referencias

Robert Ferreol
COSTA'S SURFACE.
https://mathcurve.com/surfaces.gb/costa/costa.shtml
2017

A. Gray
Costa's Minimal Surface via Mathematica.
https://www.researchgate.net/publication/254465398$_C osta' s_m inimal_s urface_v ia_M athe$
1995

Celso Costa
Example of a complete minimal immersion in R3 of genus one and three-embedded ends
1984

Wolfam
Weierstrass Zeta Function
https://mathworld.wolfram.com/WeierstrassZetaFunction.html
Wolfram
2024

¿Preguntas?
Muchas gracias
gal20399@uvg.edu.gt