Superficie de Catalan

Pablo Stefan Quintana

Universidad del Valle de Guatemala
Geometría Diferencial

28 de mayo del 2023

Agenda

- Eugène Charles Catalan
- Conceptos previos
- Superficie de Catalan
- Parametrización
- La superficie de Catalan es minimal
- Curva cicloide contenida
- La cicloide es geodésica

Eugène Charles Catalan

Eugène Charles Catalan

Nacimiento y Formación: Nació el 30 de mayo de 1814 en Brujas, que en ese momento formaba parte de los Países Bajos del Sur. A los 11 años, viajó a París y estudió matemáticas en la École Polytechnique, donde conoció al matemático Joseph Liouville.

Contribuciones:

- Descubrió una superficie mínima periódica en el espacio, que ahora se conoce como la superficie de Catalan.
- Formuló la famosa conjetura de Catalan, que finalmente se demostró en 2002 por el matemático rumano Preda Mihăilescu.
- Introdujo los números de Catalan para resolver un problema combinatorio.

Superficie Minimal

Una superficie regular M es minimal si su curvatura media es idénticamente 0

Parametrización isotérmica

Sea M una superficie regular. Se dice que una parametrización local $\overrightarrow{x} : U \subset R^2 \to M$ es isotérmica si:

$$\overrightarrow{x}_u \cdot \overrightarrow{x}_u = \overrightarrow{x}_v \cdot \overrightarrow{x}_v$$

$$\overrightarrow{x}_v \cdot \overrightarrow{x}_u = \overrightarrow{x}_u \cdot \overrightarrow{x}_v = 0$$

Función armónica

Sea $h : U \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ una función diferenciable. Es armónica si:

$$h_{xx} + h_{yy} = 0$$

Superficie de Catalan

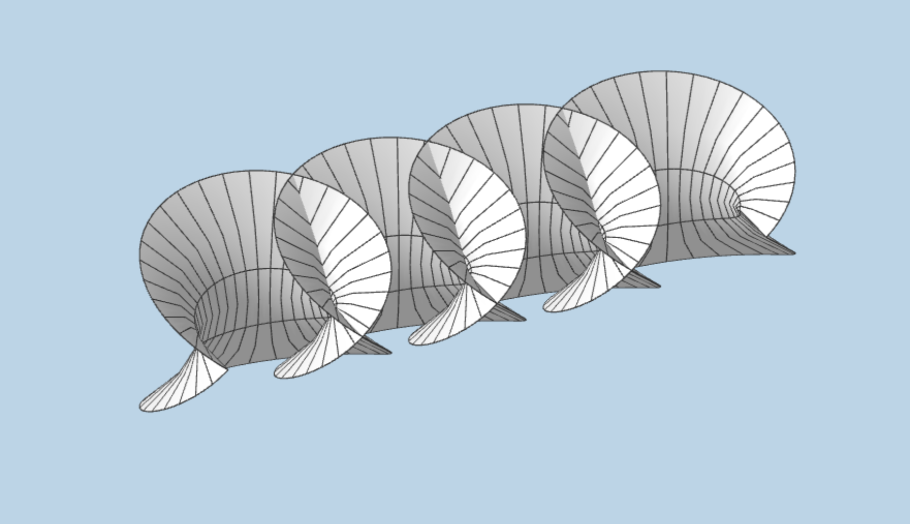

Figura 2

Parametrización

$$\overrightarrow{x}(u,v) = \left(u - sen(u)cosh(v), 1 - cos(u)cosh(v), -4sen\left(\frac{u}{2}\right) senh\left(\frac{v}{2}\right)\right)$$

Teorema

Sea M una superficie regular con parametrización isotétmica

$$\overrightarrow{x} : U \subset \mathbb{R}^2 \to M$$

. M es minimal si y solo si $\overrightarrow{x}$ es armónica en U.

La superficie de Catalan es minimal

Sus derivadas son:

- $\overrightarrow{x}_u = \left(1 - cos(u)cosh(v), sen(u)cosh(v), -2cos(\frac{u}{2})senh(\frac{v}{2})\right)$
- $\overrightarrow{x}_v = \left(-sen(u)cosh(v), -cos(u)senh(v), -2sen(\frac{u}{2})cosh(\frac{v}{2})\right)$

.

Verificando si $\overrightarrow{x}$ es isotérmica:

- $\overrightarrow{x}_u \cdot \overrightarrow{x}_u = 2cosh^2(\frac{v}{2})(cosh(v) - cos(u))$
- $\overrightarrow{x}_v \cdot \overrightarrow{x}_v = 2cosh^2(\frac{v}{2})(cosh(v) - cos(u))$
- $\overrightarrow{x}_v \cdot \overrightarrow{x}_v = 0$

La superficie de Catalan es minimal

Ahora, verificando que es armónica:

- $\overrightarrow{X}_{uu} = \left(sen(u)cosh(v), cos(u)cosh(v), sen(\frac{u}{2})senh(\frac{v}{2})\right)$
- $\overrightarrow{X}_{vv} = \left(-sen(u)cosh(v), -cos(u)cosh(v), -sen(\frac{u}{2})senh(\frac{v}{2})\right)$

Entonces:

$$\overrightarrow{X}_{vv} + \overrightarrow{X}_{uu} = 0$$

Entonces, por teorema, la superficie de Catalan es minimal

Existe una cicloide contenida en la superficie de Catalan

$$\alpha(t) = (t - sen(t), 1 - cos(t))$$

La cicloide es geodésica en la superficie

Nótese que:

$$\overrightarrow{x}(u,0) = \alpha(u) = (u - sen(u), 1 - cos(u), 0)$$

Por lo tanto, la superficie contiene la cicloide.

La cicloide es geodésica en la superficie

Ahora:

$$\overrightarrow{x}_u \times \overrightarrow{x}_v = \left(-cos(\frac{u}{2})sech(\frac{v}{2}), sen(\frac{u}{2})sech(\frac{v}{2}), -tanh(\frac{v}{2})\right)$$

y:

$$\alpha''(u) = (sen(u), cos(u), 0)$$

Entonces:

$$\alpha''(u) \cdot (\overrightarrow{x}_u \times \overrightarrow{x}_v) = 0$$

Por lo tanto, α es geodésica de la superficie de Catalan