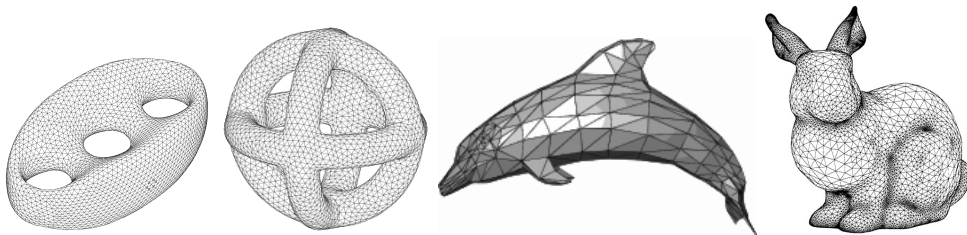


EL TEOREMA DE GAUSS-BONNET II

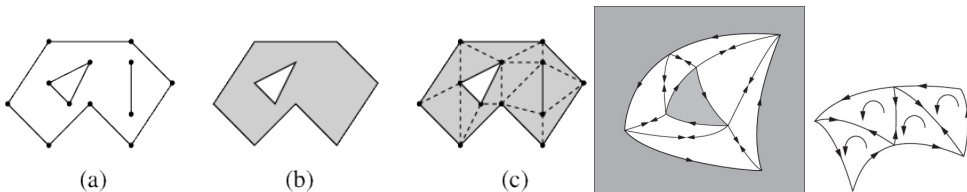
ALAN REYES-FIGUEROA
GEOMETRÍA DIFERENCIAL

(AULA 35) 14.MAYO.2024

Triangulaciones



ejemplos de triangulaciones para algunas superficies.



Triangulaciones para una región regular R .

Triangulaciones

La pregunta de si es posible triangular cualquier variedad ha sido ampliamente investigada. Algunos resultados:

- Toda variedad diferenciable (*smooth manifold*) admite una triangulación (J. H. C. Whitehead, L. E. J. Brouwer, 1949), (James Munkres, 1967).
- Toda variedad topológica (*topological manifold*) de dimensión 1, 2 ó 3, admite una triangulación. Provado para superficies por Tibor Radó (1920s), y para 3-variedades por Edwin E. Moise y R. H. Bing (1950s).
- En dimensión 4, la variedad $E8$ no admite triangulación.
- R. Kirby y L. Siebenmann, (1970s) hallaron ejemplos de variedades en dimensión 4 que no admiten triangulaciones lineales por pedazos: contraejemplo al *Hauptvermutung* (conjetura principal).
- En 2013, Ciprian Manolescu desprueba la *Triangulation Conjecture*. Muestra que existen variedades en dimensión ≥ 5 que no son homeomorfas a un complejo simplicial.

Característica de Euler

Definición

Sea $\mathcal{K}$ un complejo simplicial de dimensión n . Para $d = 0, 1, 2, \dots, n$, el **d -esqueleto** de $\mathcal{K}$ es el conjunto $\mathcal{K}_d = \{\sigma \in \mathcal{K} : \dim \sigma = d\}$ de los d -simplejos contenidos en $\mathcal{K}$. Las cardinalidades

$$\beta_i = \beta_i(\mathcal{K}) = |\mathcal{K}_i| = \dim H_i(\mathcal{K}, \mathbb{Z}),$$

se llaman los **números de Betti** de $\mathcal{K}$.

Definición

La **característica de Euler** de un complejo simplicial $\mathcal{K}$ es el número

$$\chi(\mathcal{K}) = \sum_{i=0}^{\dim \mathcal{K}} (-1)^i \beta_i(\mathcal{K}) = \sum_{i=0}^{\dim \mathcal{K}} (-1)^i |\mathcal{K}_i|.$$

Característica de Euler

Propiedades:

- $\chi(\mathcal{K})$ es un invariante topológico.
- En particular, si R es una variedad topológica (o una región), y $\mathcal{K}$ es una triangulación para R , vale

$$\chi(R) = \chi(\mathcal{K}).$$

- En el caso de superficies, si $R \subseteq \mathbf{x}(U)$ es una región regular sobre una superficie, y $\mathcal{K}$ es una triangulación de R , entonces

$$\begin{aligned}\chi(R) &= \chi(\mathcal{K}) = \sum_{i=0}^2 (-1)^i |\mathcal{K}_i| = |\mathcal{K}_0| - |\mathcal{K}_1| + |\mathcal{K}_2| \\ &= V - A + F.\end{aligned}$$

($V = \#$ vértices, $A = \#$ de aristas, $F = \#$ de caras).

Característica de Euler

Ejemplos:

- La característica de Euler de la esfera S^2 es $\chi(S^2) = 2$.
- La característica de Euler de una superficie compacta orientable de género g es $\chi(S) = 2 - 2g$.
- El **Teorema de Clasificación de Superficies Compactas**, establece que toda superficie compacta está determinada por su característica de Euler, a menos de homeomorfismo.
 - Para S_g orientable: $\chi(S_g) = 2 - 2g$
 - Para N_g no-orientable: $\chi(N_g) = 2 - g$
- En general, para superficies o regiones (orientables), con género g , y b componentes frontera, $\chi(R) = 2 - 2g - b$.
- Para el disco $\mathbb{D}$ o cualquier región simple R , $\chi(R) = 1$.
- Para el cilindro $C = S^1 \times \mathbb{R}$, $\chi(C) = 0$.

Triangulaciones

Recordemos que $\mathcal{K}$ es una triangulación de una región R si:

- $T_i, T_j \in \mathcal{K}$ y $T_i \cap T_j \neq \emptyset \Rightarrow T_i \cap T_j$ es una arista o vértice común.
- $R = \bigcup_{T \in \mathcal{K}} T$.

Proposición

Sea S una superficie regular orientada, $R \subseteq S$ una región regular, y sea $\mathbf{x}_\alpha : U_\alpha \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow S$ una colección de parametrizaciones positivas tales que $R \subseteq \bigcup_\alpha \mathbf{x}_\alpha(U_\alpha)$. Entonces, existe una triangulación $\mathcal{K} = \{T_j\}_{j=1}^r$ de R de modo que para $j = 1, 2, \dots, r$ existe α_j con

$$T_j \subseteq \mathbf{x}_{\alpha_j}(U_{\alpha_j}).$$

Más aún, si orientamos los ∂T_j positivamente, triángulos adyacentes inducen orientaciones opuestas sobre la arista común. $\square$

Obs! Sabemos que cada triángulo T_j de la triangulación $\mathcal{K}$ está contenido en la imagen de una parametrización ortogonal ($F = 0$).

Teorema de Gauss-Bonnet

Nuestro objetivo ahora es elaborar una versión del Teorema de Gauss-Bonnet para una región regular R limitada cualquiera.

Sea S superficie orientada, $\mathbf{x} : U \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ parametrización regular, y sea $R \subseteq \mathbf{x}(U)$ una región regular, cuya frontera ∂R está parametrizada por una curva $\alpha : [a, b] \rightarrow \mathbf{x}(U)$, regular por partes, en $a = t_0 < t_1 < \dots < t_n = b$, y parametrizada por longitud de arco, y $\partial R = \alpha_1 \cup \dots \cup \alpha_c$.

Entonces

Teorema (Teorema de Gauss-Bonnet global)

$$\int_R K dS + \int_{\partial R} \kappa_g ds + \sum_{\ell=1}^c \theta_\ell = 2\pi \chi(R).$$

Teorema de Gauss-Bonnet

Prueba:

Sea $\mathcal{K} = \{T_j\}_{j=1}^r$ una triangulación de la región R (sobre S), orientada positivamente. Para cada triángulo T_j , el teorema de Gauss-Bonnet local establece

$$\int_{T_j} K dS + \int_{\partial T_j} \kappa_g ds + \sum_{k=1}^3 \theta_{jk} = 2\pi, \quad j = 1, 2, \dots, r;$$

donde $\theta_{j1}, \theta_{j2}, \theta_{j3}$ son los ángulos externos a T_j .

Denotamos

V = número de vértices en $\mathcal{K}$,

A = número de aristas en $\mathcal{K}$,

F = número de caras o regiones triangulares en $\mathcal{K}$.

Teorema de Gauss-Bonnet

Sumando las ecuaciones anteriores, para $j = 1, 2, \dots, r$, obtenemos

$$\int_R K dS + \int_{\partial R} \kappa_g ds + \sum_{j=1}^r \sum_{k=1}^3 \theta_{jk} = 2\pi F. \quad (1)$$

Los ángulos internos de los triángulos T_j son

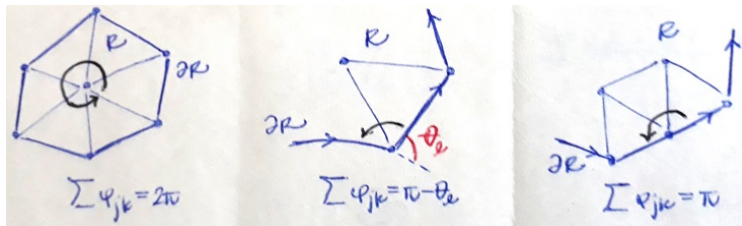
$$\varphi_{jk} = \pi - \theta_{jk} \Rightarrow \sum_{j=1}^r \sum_{k=1}^3 \theta_{jk} = \sum_{j=1}^r \sum_{k=1}^3 (\pi - \varphi_{jk}) = 3\pi F - \sum_{j=1}^r \sum_{k=1}^3 \varphi_{jk}.$$

Entonces (1) puede escribirse como

$$\int_R K dS + \int_{\partial R} \kappa_g ds - \sum_{j=1}^r \sum_{k=1}^3 \varphi_{jk} = -\pi F. \quad (2)$$

Teorema de Gauss-Bonnet

Observe ahora que en una triangulación $\mathcal{K}$ tenemos varios tipos de vértices:



Denotemos

- V_i = número de vértices internos en $\mathcal{K}$,
- V_e = número de vértices externos en $\mathcal{K}$,
- V_c = número de vértices externos que son vértices de la curva ∂R ,
- V_t = $V_e - V_c$ = número de vértices externos de la triangulación $\mathcal{K}$.

Teorema de Gauss-Bonnet

y

A_i = número de aristas internos en $\mathcal{K}$,

A_e = número de aristas externos en $\mathcal{K}$.

Como las componentes α_j de ∂R son curvas cerradas, entonces $V_e = A_e$. Además, en la triangulación $\mathcal{K}$ vale $3F = 2A_i + A_e \Rightarrow A_e + 3F = 2A_i + 2A_e = 2A \Rightarrow A_e = 2A - 3F$.

Entonces

$$\begin{aligned}\sum_{j=1}^r \sum_{k=1}^3 \theta_{jk} &= 3\pi F - \sum_{j=1}^r \sum_{k=1}^3 \varphi_{jk} = \pi(2A_i + A_e) - \sum_{j=1}^r \sum_{k=1}^3 \varphi_{jk} \\ &= 2\pi A_i + \pi A_e - \sum_{j=1}^r \sum_{k=1}^3 \varphi_{jk}.\end{aligned}$$

Teorema de Gauss-Bonnet

$$\begin{aligned}\Rightarrow \sum_{j=1}^r \sum_{k=1}^3 \theta_{jk} &= 2\pi A_i + \pi A_e - \sum_{j=1}^r \sum_{k=1}^3 \varphi_{jk} \\&= 2\pi A_i + \pi A_e - \left(2\pi V_i + \pi V_t + \sum_{\ell=1}^c (\pi - \theta_{\ell}) \right) \\&= 2\pi A_i + \pi A_e - 2\pi V_i - \pi V_t - \pi V_c + \sum_{\ell=1}^c \theta_{\ell} \\&= 2\pi A_i + \pi A_e + (\pi A_e - \pi V_e) - 2\pi V_i - \pi V_t - \pi V_c + \sum_{\ell=1}^c \theta_{\ell} \\&= 2\pi(A_i + A_e) - 2\pi(V_i + V_e) + \sum_{\ell=1}^c \theta_{\ell} = 2\pi A - 2\pi V + \sum_{\ell=1}^c \theta_{\ell}.\end{aligned}$$

Teorema de Gauss-Bonnet

Sustituyendo lo anterior en (1), resulta

$$\int_R K dS + \int_{\partial R} \kappa_g ds + \left(2\pi A - 2\pi V + \sum_{\ell=1}^c \theta_\ell \right) = 2\pi F. \quad (3)$$

Como la característica de Euler de R se calcule mediante la triangulación $\mathcal{K}$ como $\chi(R) = V - A + F$, entonces (3) equivale a

$$\begin{aligned} \int_R K dS + \int_{\partial R} \kappa_g ds + \sum_{\ell=1}^c \theta_\ell &= 2\pi V - 2\pi A + 2\pi F \\ &= 2\pi(V - A + F) \\ &= 2\pi\chi(R). \quad \square \end{aligned}$$

Corolario

Si R es una región simple sobre S , (satisfaciendo todas las hipótesis en el Teorema de Gauss-Bonnet), entonces

$$\int_R K dS + \int_{\partial R} \kappa_g ds + \sum_{\ell=1}^c \theta_\ell = 2\pi.$$

Prueba: Si R es una región simple, entonces $\chi(R) = \chi(\mathbb{D}) = 1$.

Corolario

Si S es una superficie compacta, orientable, entonces

$$\int_S K dS = 2\pi\chi(S).$$

Prueba: En este caso, $R = S$ y $\partial R = \emptyset \Rightarrow \sum \theta_\ell = 0$.

Corolario (Triángulos geodésicos)

Si R es un triángulo geodésico sobre S , con ángulos internos $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$, entonces

$$\sum_{i=1}^3 \varphi_i = \pi + \int_R K dS.$$

Prueba: $\theta_i = \pi - \varphi_i, i = 1, 2, 3 \Rightarrow \sum \theta_i = 3\pi - \sum \varphi_i$. Por Gauss-Bonnet

$$\int_R K dS + \int_{\partial R} \kappa_g ds + \left(3\pi - \sum_{i=1}^3 \varphi_i\right) = 2\pi\chi(R).$$

Como R es región simple $\Rightarrow \chi(R) = 1$. Además, como los lados de R son geodésicas, entonces $\kappa_g = 0$ sobre ∂R . Así

$$\sum_{i=1}^3 \varphi_i = \pi + \int_R K dS. \quad \square$$

Corolario

Toda superficie compacta, conexa, orientable, con curvatura positiva, es homeomorfa a S^2 .

Prueba: Sea S orientable, compacta, conexa con curvatura $K > 0$. Por Gauss-Bonnet

$$2\pi\chi(S) = \int_S K dS > 0 \Rightarrow \chi(S) > 0.$$

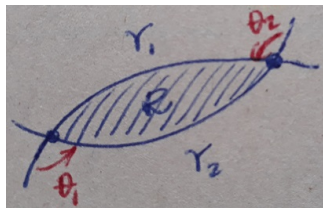
Como S es compacta, también $\chi(S) = 2 - 2g$, donde g es el género de S .

En particular, la única posibilidad es que $g = 0$. Por el Teorema de clasificación de superficies compactas, $S \simeq S^2$.



Corolario

Sea S superficie orientable, con $K \leq 0$. Entonces, dos geodésicas γ_1, γ_2 en S que parten de un punto $\mathbf{p} \in S$ no pueden encontrarse nuevamente en un punto $\mathbf{q} \in S$ de tal forma que los trazos de γ_1 y γ_2 , constituyen la frontera de una región simple $R \subset S$.



Prueba: De Gauss-Bonnet, $\int_R K dS + \theta_1 + \theta_2 = 2\pi$.

Como $\theta_1, \theta_2 < \pi$ (¿por qué?) $\Rightarrow \theta_1 + \theta_2 < 2\pi$

$$\Rightarrow \int_R K dS > 0.$$

Pero $K \leq 0$, un absurdo. $\square$

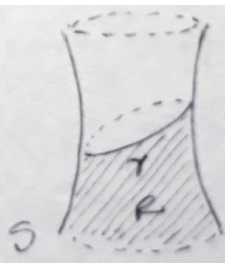
Corolario

Sea S una superficie homeomorfa al cilindro $S^1 \times \mathbb{R}$, con $K < 0$. Entonces, S posee a lo sumo una geodésica cerrada simple.

Prueba: Tenemos dos curvas cerradas posibles sobre S :



$$R \simeq \mathbb{D}^2$$

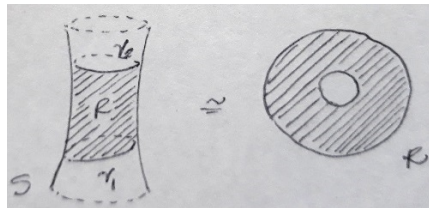
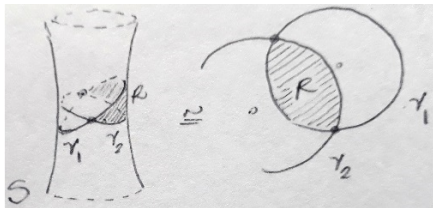


$$R \simeq \mathbb{R}^2 - \{0\}$$

Aplicaciones

Como $K < 0$, y por el corolario anterior, una geodésica cerrada γ sobre S no puede ser simple. De lo contrario, γ encierra una región R , homeomorfa al disco $\mathbb{D}$, pues ∂R consistiría de dos geodésicas, encerrando una región simple ($\rightarrow \leftarrow$). Portanto el primer caso no ocurre.

Supongamos ahora que γ_1, γ_2 son geodésicas cerradas simples sobre S , como en el segundo caso. Tenemos de nuevo dos posibilidades:



El caso $\gamma_1 \cap \gamma_2 \neq \emptyset$ es imposible. En ese caso, la región limitada R (limitada por γ_1 y γ_2) sería una región simple limitada por dos geodésicas, lo cual contradice de nuevo el corolario anterior.

Luego, $\gamma_1 \cap \gamma_2 = \emptyset$. Entonces la región comprendida entre γ_1 y γ_2 es homeomorfa al cilindro $S^1 \times \mathbb{R} \Rightarrow \chi(R) = 0$. Por Gauss-Bonnet

$$0 > \int_R K dS = 2\pi\chi(R) = 0,$$

un absurdo ($\rightarrow \leftarrow$). Este caso tampoco es posible.

Portanto, existe a lo suma una geodésica cerrada simple. $\square$