

# **EL TEOREMA DE GAUSS-BONNET**

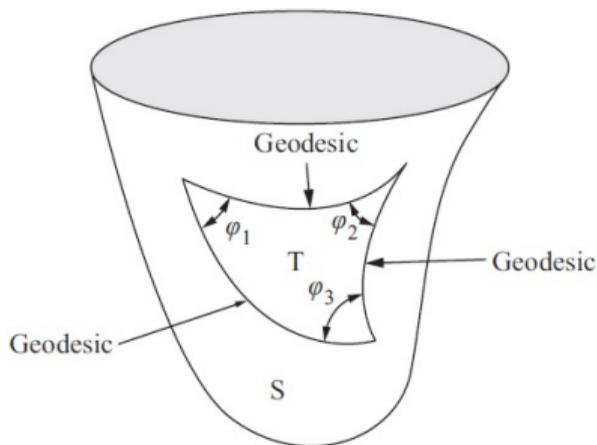
ALAN REYES-FIGUEROA  
GEOMETRÍA DIFERENCIAL

(AULA 34) 09.MAYO.2024

# Motivación

¿Cuánto suman los ángulos internos en un triángulo?

Respuesta: Depende de la geometría donde yace dicho triángulo.



Una primera versión del teorema fue dada por Gauss en 1848, y trata sobre triángulos geodésicos.

Afirma que el exceso sobre  $\pi$  de la suma de los ángulos internos en un triángulo geodésico  $T$  es la integral de la curvatura:

$$\sum_{j=1}^3 \varphi_j = \pi + \iint_T K dS.$$

P. O. Bonnet: extensión a regiones acotadas y a superficies compactas.

Recordemos que si  $\mathbf{x} : U \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow S$  es una parametrización ortogonal de  $S$  (esto es  $F = 0$ ), entonces la curvatura de Gauss es

$$K = -\frac{1}{2\sqrt{EG}} \left( \frac{\partial}{\partial u} \left( \frac{G_u}{\sqrt{EG}} \right) + \frac{\partial}{\partial v} \left( \frac{E_v}{\sqrt{EG}} \right) \right). \quad (1)$$

## Proposición

Sea  $S$  superficie regular en  $\mathbb{R}^3$ ,  $\mathbf{p} \in S$ . Entonces, es posible encontrar una parametrización  $\mathbf{x} : U \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow S$ , definida en una vecindad  $U$  de  $\mathbf{q} = \mathbf{x}^{-1}(\mathbf{p})$  tal que  $F = 0$  en  $U$ .  $\square$

De (1),  $K\sqrt{EG} = -\frac{1}{2} \left( \frac{\partial}{\partial u} \left( \frac{G_u}{\sqrt{EG}} \right) + \frac{\partial}{\partial v} \left( \frac{E_v}{\sqrt{EG}} \right) \right)$ , observe que el término en el lado izquierdo  $\sqrt{EG}$  tiene una interpretación geométrica, pues

$$\int_R f dS = \int_{\mathbf{x}^{-1}(R)} (f \circ \mathbf{x}) \sqrt{EG} du dv.$$

Por otro lado, el término del lado derecho tiene una estructura similar a una divergencia  $\nabla \cdot H$ , para algún campo vectorial  $H$  en  $\mathbb{R}^2$  (pues  $\nabla \cdot H = \operatorname{div} H = \frac{\partial}{\partial u}(H_1) + \frac{\partial}{\partial v}(H_2)$ ).

## Definición

Una región **regular**  $\Omega \subset S$  es un abierto conexo de  $S$ , con cerradura compacta en  $S$ , cuya frontera  $\partial\Omega$  es unión finita disjunta de curvas cerradas simples, cada una diferenciable por partes.

Una región regular es **simple** si es homeomorfa a  $\mathbb{D}$ .

## Definición

Sean  $S \subset \mathbb{R}^3$  una superficie orientada,  $\partial\Omega = c_1 \cup \dots \cup c_n$ . Diremos que una parametrización  $\alpha_i(s)$  de  $c_i$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$ ,  $|\alpha_i'(s)| = 1$ , es **positiva** si  $\mathbf{n}_i(s) = N \times \alpha_i'(s)$  apunta siempre para adentro de  $\Omega$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$ .

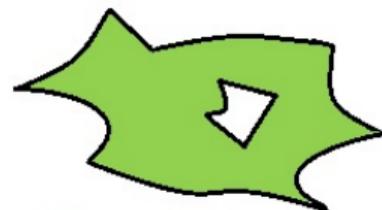
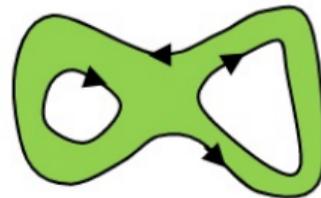
En ese caso, diremos que  $\partial\Omega$  está **positivamente orientada**.



Simple



No simple



Diferenciable a partes

## Teorema (Teorema de la Divergencia)

Sea  $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$  una región regular y sea  $X = (P, Q) = P \frac{\partial}{\partial u} + Q \frac{\partial}{\partial v}$  un campo vectorial sobre  $\overline{\Omega}$ .  
Sea  $\mathbf{n} = (v', -u')$  el vector normal unitario a la curva  $\partial\Omega = \alpha(s) = (u, v)$ . Entonces

$$\int_{\Omega} \operatorname{div} X \, du \, dv = \int_{\partial\Omega} X \cdot \mathbf{n} \, ds. \quad \square$$

Esto es, si  $\alpha : [a, b] \rightarrow \partial\Omega$ , con  $\alpha(s) = (u(s), v(s))$  es diferenciable en cada subintervalo de la partición  $a = t_0 < t_1 < \dots < t_n = b$  de  $[a, b]$ , entonces

$$\int_{\Omega} \left( \frac{\partial P}{\partial u} + \frac{\partial Q}{\partial v} \right) du \, dv = \sum_{i=1}^n \int_{t_{i-1}}^{t_i} (P(\alpha(s))v'(s) - Q(\alpha(s))u'(s)) \, ds.$$

Si  $S$  es superficie orientada,  $\mathbf{x} : U \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$  parametrización ortogonal de  $S$ , y  $R \subseteq \mathbf{x}(U)$  es una región regular simple, con  $\partial\Omega = \alpha(s)$  positivamente orientada. Aplicando el Teorema de la Divergencia a  $X = \left(\frac{G_u}{\sqrt{EG}}, \frac{E_v}{\sqrt{EG}}\right)$  y (1)

$$\begin{aligned}\int_R K dS &= \int_{\mathbf{x}^{-1}(R)} K \sqrt{EG} du dv = -\frac{1}{2} \int_{\mathbf{x}^{-1}(R)} \operatorname{div} X du dv \\ &= -\frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \int_{t_{i-1}}^{t_i} \left( \frac{G_u}{\sqrt{EG}} v'(s) - \frac{E_v}{\sqrt{EG}} u'(s) \right) ds.\end{aligned}$$

- el lado derecho anterior no depende del sistema de coordenadas.
- $\int_R K$  sólo depende del comportamiento de  $S$  en una vecindad de  $\partial R$ .

Recordemos de la clase anterior que la curvatura geodésica de una curva  $\alpha$ ,  $|\alpha'| = 1$ , está dada por

$$\kappa_g \alpha(s) = [\nabla_{\alpha} \alpha'(s)] = \langle \nabla_{\alpha} \alpha'(s), N \times \alpha'(s) \rangle.$$

Recordemos también que si  $X, Y$  son campos tangentes unitarios, y  $\varphi$  es el ángulo entre ellos, entonces  $\varphi'(s) = [\nabla_{\alpha} Y(s)] - [\nabla_{\alpha} X(s)]$ .

En particular, si  $X(s) = \frac{\mathbf{x}_u(\alpha(s))}{\sqrt{E}}$  y  $Y(s) = \alpha'(s)$ , tenemos  $|X(s)| = |Y(s)| = 1$ , y

## Lema

Sea  $S$  superficie orientada,  $\mathbf{x} : U \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$  parametrización ortogonal de  $S$ , y  $\alpha(s) : I \rightarrow \mathbf{x}(U)$  una curva con  $|\alpha'(s)| = 1$ ,  $\forall s \in I$ , positivamente orientada. Entonces

$$\kappa_g \alpha(s) = \frac{1}{2} \left( \frac{G_u}{\sqrt{EG}} v'(s) - \frac{E_v}{\sqrt{EG}} u'(s) \right) + \frac{d}{ds} \varphi(s).$$

# Preliminares

Prueba:

Observe que

$$X'(s) = \frac{d}{ds} \left( \frac{\mathbf{x}_u}{\sqrt{E}} \right) = \left( \frac{\mathbf{x}_{uu}}{\sqrt{E}} - \frac{1}{2} \frac{E_u \mathbf{x}_u}{E^{3/2}} \right) u'(s) + \left( \frac{\mathbf{x}_{uv}}{\sqrt{E}} - \frac{1}{2} \frac{E_v \mathbf{x}_u}{E^{3/2}} \right) v'(s).$$

Como  $N \times X = \frac{\mathbf{x}_v}{\sqrt{G}}$  y  $[\nabla_\alpha X] = \langle \nabla_\alpha X, N \times X \rangle = \langle \nabla_\alpha X, \frac{\mathbf{x}_v}{\sqrt{G}} \rangle$ , entonces

$$[\nabla_\alpha X] = \frac{\langle \mathbf{x}_{uu}, \mathbf{x}_v \rangle}{\sqrt{EG}} u'(s) + \frac{\langle \mathbf{x}_{uv}, \mathbf{x}_v \rangle}{\sqrt{EG}} v'(s).$$

De  $\langle \mathbf{x}_{uv}, \mathbf{x}_v \rangle = \frac{1}{2} \langle \mathbf{x}_v, \mathbf{x}_v \rangle_u = \frac{1}{2} G_u$  y  $\langle \mathbf{x}_{uu}, \mathbf{x}_v \rangle = -\langle \mathbf{x}_u, \mathbf{x}_{uv} \rangle = -\frac{1}{2} \langle \mathbf{x}_u, \mathbf{x}_u \rangle_v = -\frac{1}{2} E_v$ , obtenemos la expresión requerida

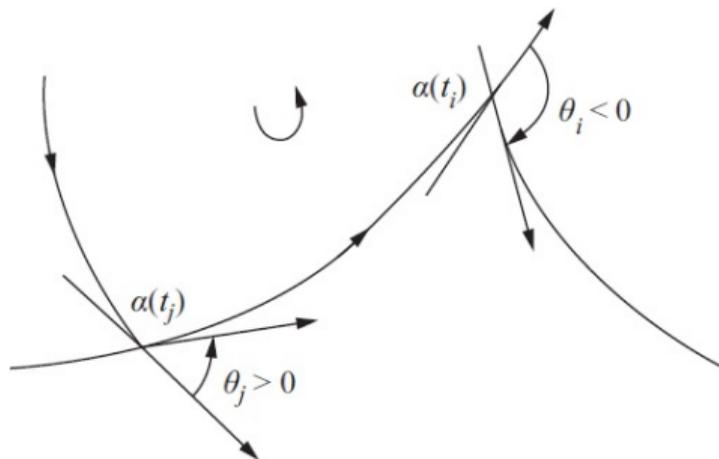
$$\kappa_g \alpha(s) = \frac{1}{2} \left( \frac{G_u}{\sqrt{EG}} v'(s) - \frac{E_v}{\sqrt{EG}} u'(s) \right) + \frac{d}{ds} \varphi(s),$$

donde  $\varphi(s)$  es el ángulo de  $X(s)$  a  $\alpha'(s)$ .  $\square$

# Preliminares

Tomemos ahora una región  $R \subseteq \mathbf{x}(U)$  regular y simple, cuyo borde  $\partial R$  es positivamente orientado. Consideramos una parametrización  $\alpha : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$  de  $\mathbf{x}^{-1}(\partial R)$ , regular por partes en los subintervalos de  $a = t_0 < t_1 < \dots < t_n = b$ .

Denotamos por  $\theta_j$  al ángulo  $\theta_j = \alpha'(t_j^+) - \alpha'(t_j^-)$  (ángulos externos a  $\partial R$ )



## Teorema (Índice de Rotación)

Para una curva cerrada y simple  $\alpha : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$ , regular por partes, en  $a = t_0 < t_1 < \dots < t_n = b$ , vale

$$\sum_{j=1}^n (\varphi_j(t_j) - \varphi_j(t_{j-1})) + \sum_{j=1}^n \theta_j = \pm 2\pi.$$

Aquí,  $\varphi_j(s)$  mide el ángulo desde  $\mathbf{e}_1$  a  $\alpha'_j(s)$  (esto es, el ángulo externo a  $\alpha$  en el vértice  $j$ ); y el signo depende de la orientación de  $\alpha$ .

Prueba: Basta considerar

$$\sum_{j=1}^n (\varphi_j(t_j) - \varphi_j(t_{j-1})) + \sum_{j=1}^n \theta_j = \int_a^b \theta(s) ds = 2\pi \text{Index}(\alpha) = \pm 2\pi. \quad \square$$

# Teorema de Gauss-Bonnet

Sea  $S$  superficie orientada,  $\mathbf{x} : U \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$  parametrización regular con  $F = 0$ , y sea  $R \subseteq \mathbf{x}(U)$  una región regular simple, cuya frontera  $\partial R$  está parametrizada por una curva  $\alpha : [a, b] \rightarrow \mathbf{x}(U)$ , regular por partes, en  $a = t_0 < t_1 < \dots < t_n = b$ , y parametrizada por longitud de arco, con vector normal unitario a  $\partial R$ , dado por  $\mathbf{n}(s) = (v'(s), -u'(s))$ .  
Entonces

## Teorema (Teorema de Gauss-Bonnet local)

*Bajo las condiciones anteriores*

$$\int_R K dS + \sum_{j=1}^n \int_{t_{j-1}}^{t_j} \kappa_g \alpha(s) ds + \sum_{j=1}^n \theta_j = 2\pi.$$

Esto es,

$$\int_R K dS + \int_{\partial R} \kappa_g ds + \sum_{j=1}^n \theta_j = 2\pi.$$

# Teorema de Gauss-Bonnet

Prueba: Definamos  $X = \left( \frac{G_u}{\sqrt{EG}}, \frac{E_v}{\sqrt{EG}} \right)$ ,  $\mathbf{n} = (v', -u')$ . Por el lema, tenemos

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^n \int_{t_{j-1}}^{t_j} \kappa_g \alpha(s) ds &= \sum_{j=1}^n \int_{t_{j-1}}^{t_j} \frac{1}{2} \left( \frac{G_u}{\sqrt{EG}} \frac{dv}{ds} - \frac{E_v}{\sqrt{EG}} \frac{du}{ds} \right) ds + \sum_{j=1}^n \int_{t_{j-1}}^{t_j} \frac{d}{ds} \varphi_j(s) ds \\ &= \sum_{j=1}^n \int_{t_{j-1}}^{t_j} \frac{1}{2} \left( \frac{G_u}{\sqrt{EG}} dv - \frac{E_v}{\sqrt{EG}} du \right) + \sum_{j=1}^n \varphi_j(s) \Big|_{t_{j-1}}^{t_j} \\ &= \sum_{j=1}^n \int_{t_{j-1}}^{t_j} \frac{1}{2} X \cdot \mathbf{n} ds + \sum_{j=1}^n \varphi_j(s) \Big|_{t_{j-1}}^{t_j} = \iint \frac{1}{2} \operatorname{div} X du dv + \sum_{j=1}^n \varphi_j(s) \Big|_{t_{j-1}}^{t_j} \\ &= \iint -K \sqrt{EG} du dv + \sum_{j=1}^n (\varphi_j(t_j) - \varphi(t_{j-1})) \\ &= - \iint_R K dS - \sum_{j=1}^n \theta_j + 2\pi. \end{aligned}$$

# Teorema de Gauss-Bonnet

De ahí que

$$\int_R K dS + \sum_{j=1}^n \int_{t_{j-1}}^{t_j} \kappa_g \alpha(s) ds + \sum_{j=1}^n \theta_j = 2\pi. \quad \square$$

## Obs!

- El Teorema de Gauss-Bonnet local, sobre una región regular  $R$ , combina información geométrica de diferentes naturalezas: la curvatura gaussiana en  $R$ , la curvatura geodésica en  $\partial R$ , más información de los ángulos externos.
- Existe una versión global de Teorema de Gauss-Bonnet sobre una superficies compacta  $S$ . Esta combina además, información topológica de  $S$ .

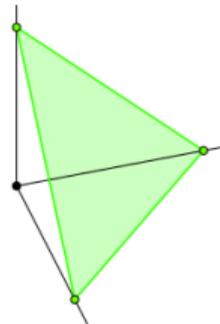
Mencionamos ahora varios conceptos topológicos que serán de utilidad.

# Simplejos

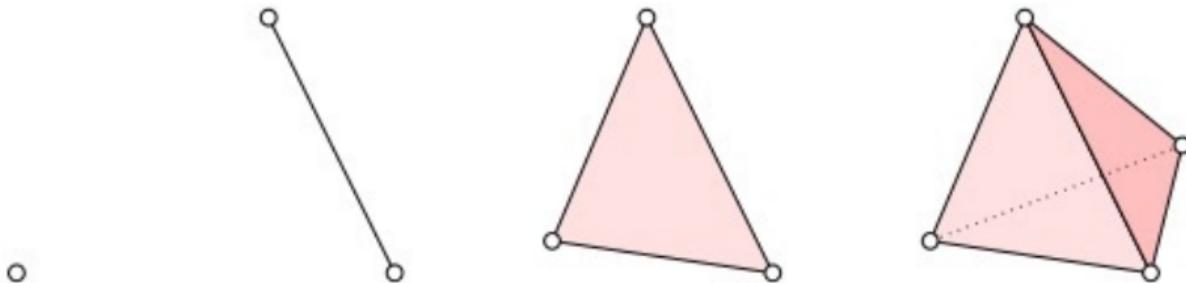
## Definición

El **simplex estándar** o  **$n$ -simplex**  $\Delta^n$ , es el subconjunto de  $\mathbb{R}^{n+1}$  definido por

$$\Delta^n = \{(t_0, \dots, t_n) \in \mathbb{R}^{n+1} : \sum_{i=0}^n t_i = 1 \text{ y } t_i \geq 0, \forall i\}.$$



2-simplex  $\Delta^2 \subset \mathbb{R}^3$ .



Simplejos estándar  $\Delta^n$ , para  $n = 0, 1, 2, 3$ .

# Simplejos

- Los vértices del  $n$ -simplex estándar son los puntos  $\mathbf{e}_0, \mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n \in \mathbb{R}^{n+1}$ ,

$$\mathbf{e}_0 = (1, 0, 0, \dots, 0), \quad \mathbf{e}_1 = (0, 1, 0, \dots, 0), \quad \dots, \quad \mathbf{e}_n = (0, 0, 0, \dots, 1).$$

- Denotamos al  $n$ -simplex  $\Delta^n$  por  $[\mathbf{e}_0, \mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n]$ .
- Un conjunto de puntos  $\mathbf{v}_0, \mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n \in \mathbb{R}^{n+1}$  (con  $\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_0, \mathbf{v}_2 - \mathbf{v}_0, \dots, \mathbf{v}_n - \mathbf{v}_0$  l.i.), define un  $n$ -simplex arbitrario  $\sigma = [\mathbf{v}_0, \mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n] \subset \mathbb{R}^{n+1}$  por mediante el mapa

$$\sigma = [\mathbf{v}_0, \mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n] = \left\{ \mathbf{x} = \sum_{i=0}^n t_i \mathbf{v}_i \in \mathbb{R}^{n+1} : \sum_{i=0}^n t_i = 1 \text{ y } t_i \geq 0, \forall i \right\}.$$

- Hay un homeomorfismo natural de  $\Delta^n$  a  $[\mathbf{v}_0, \mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n]$ , dado por

$$\sum_{i=0}^n t_i \mathbf{e}_i \longrightarrow \sum_{i=0}^n t_i \mathbf{v}_i.$$

## Definición

Sea  $\sigma = [\mathbf{v}_0, \mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n]$  un  $n$ -simplex en  $\mathbb{R}^p$ .

Cualquier  $m$ -simplex,  $0 \leq m < n$ , formado de los vértices de  $\sigma$ , es llamado una  $m$ -**cara** de  $\sigma$ . En particular, los  $0$ -caras son los **vértices** de  $\sigma$ ; las  $1$ -caras son las **aristas** de  $\sigma$ ; y las  $(n - 1)$ -caras son las **caras** (faces) de  $\sigma$ .

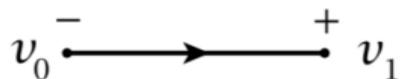
En particular, la  $i$ -ésima cara de  $\sigma$  es  $\sigma_i = [\mathbf{v}_0, \dots, \mathbf{v}_{i-1}, \mathbf{v}_{i+1}, \dots, \mathbf{v}_n]$ .

## Definición

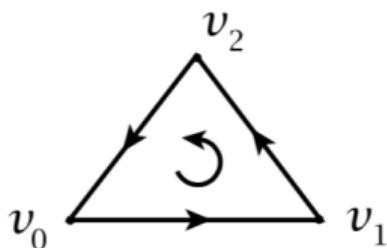
Decimos que un  $n$ -simplex  $\sigma = [\mathbf{v}_0, \mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n]$  tiene una **orientación positiva** si  $\det[\mathbf{v}_0, \mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n] > 0$ . El **borde** (con signo) de  $\sigma$  se define como

$$\partial\sigma = \sum_{i=0}^n (-1)^i \sigma_i = \sum_{i=0}^n (-1)^i [\mathbf{v}_0, \dots, \mathbf{v}_{i-1}, \mathbf{v}_{i+1}, \dots, \mathbf{v}_n].$$

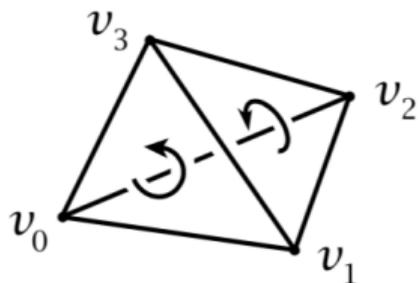
# Borde de un Simplejo



$$\partial[v_0, v_1] = [v_1] - [v_0]$$



$$\partial[v_0, v_1, v_2] = [v_1, v_2] - [v_0, v_2] + [v_0, v_1]$$



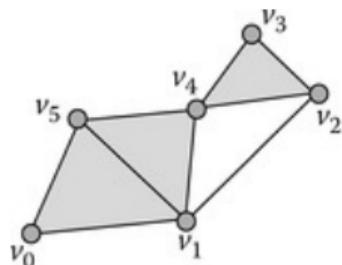
$$\begin{aligned} \partial[v_0, v_1, v_2, v_3] &= [v_1, v_2, v_3] - [v_0, v_2, v_3] \\ &\quad + [v_0, v_1, v_3] - [v_0, v_1, v_2] \end{aligned}$$

# Complejos Simpliciales

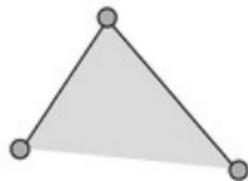
## Definición

Un **complejo simplicial** es un conjunto finito de simplejos  $\mathcal{K}$  de  $\mathbb{R}^n$ , que cumple las dos condiciones siguientes:

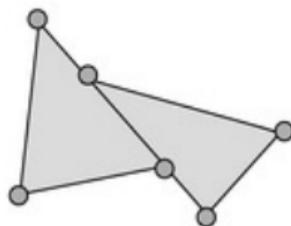
- Si un  $n$ -simplex  $\sigma$  pertenece a  $\mathcal{K}$  entonces todas sus  $m$ -caras pertenecen a  $\mathcal{K}$ , para  $0 \leq m \leq n$ .
- Si dos simplejos  $\sigma, \tau$  de  $\mathcal{K}$  se cortan, entonces su intersección  $\sigma \cap \tau$  es una cara común.



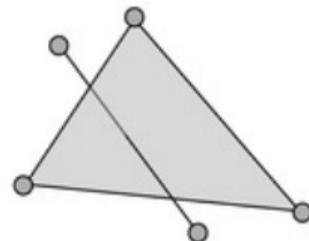
(a) A simplicial complex



(b) Missing edge



(c) Shared partial edge



(d) Nonface intersection

# Complejos Simpliciales

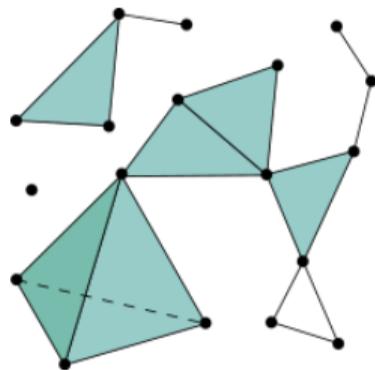
## Definición

La **dimensión** de un  $n$ -simplex  $\sigma$  es  $\dim \sigma = n$ . La dimensión de un complejo simplicial  $\mathcal{K}$  se define por

$$\dim \mathcal{K} = \max\{\dim \sigma : \sigma \in \mathcal{K}, \sigma \text{ es simplex}\}.$$

Los complejos simpliciales pueden ser estructuras muy complicadas. Nos interesa aquí sólo los complejos de dimensión  $\leq 2$ .

**Obs!** Si  $S \subseteq \mathbb{R}^3$  es una superficie, nos interesan las imágenes de complejos simpliciales en  $U \subseteq \mathbb{R}^2$ , bajo la parametrización  $\mathbf{x} : U \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ .



## Definición

Una **triangulación** de un espacio topológico  $X$  es un complejo simplicial  $\mathcal{K}$  homeomorfo a  $X$ , junto con un homeomorfismo  $h : \mathcal{K} \rightarrow X$ .

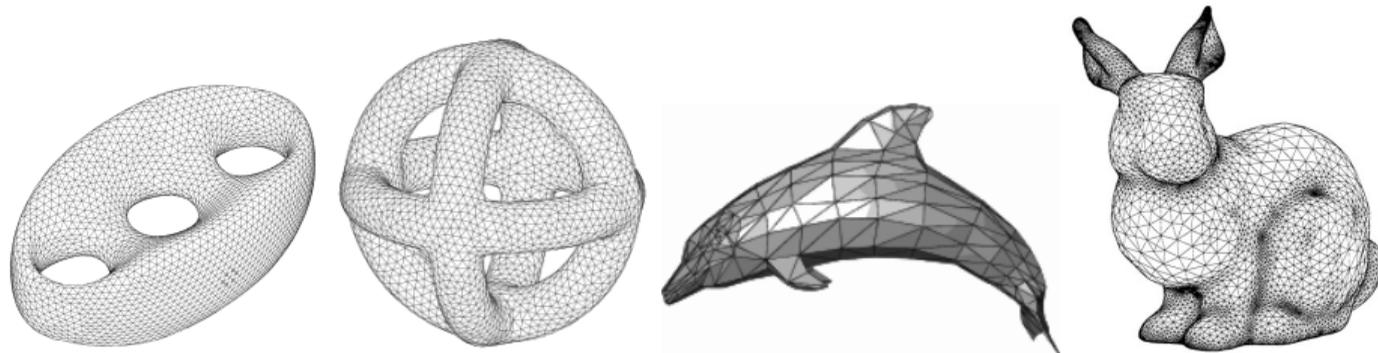
**Obs!** Típicamente, los elementos de esta triangulación son simplejos de la misma dimensión  $\dim X$ .

En el caso de superficies

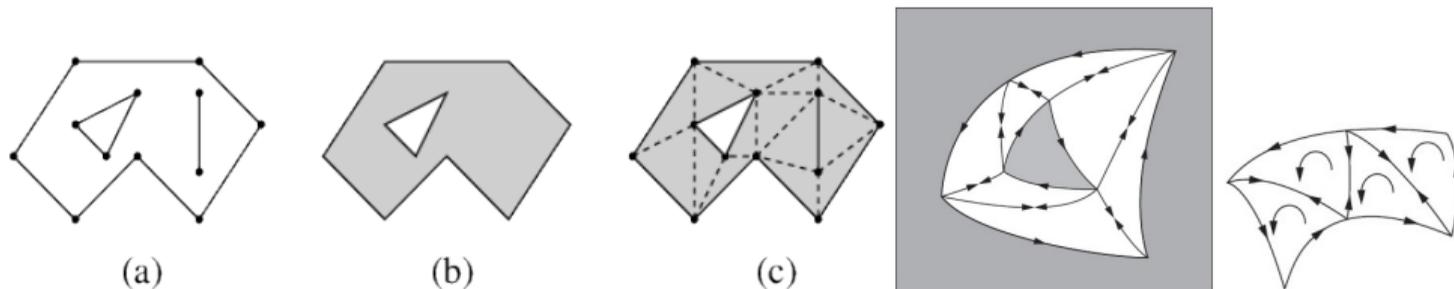
## Definición

Una región regular simple  $R$  sobre una superficie  $S \subset \mathbb{R}^3$  es un **triángulo** si  $\partial R$  posee tres vértices (esto es, si  $R$  es la imagen parametrizada de un 2-simplex). En ese caso, una triangulación de  $R$  es un complejo simplicial  $\mathcal{K}$  formado por una colección (finita) de triángulos y sus caras, de forma que  $\mathcal{K}$  es homeomorfo a  $R$ .

# Triangulaciones



Ejemplos de triangulaciones para algunas superficies.



Triangulaciones para una región regular  $R$ .