

# **LA DERIVADA COVARIANTE**

ALAN REYES-FIGUEROA  
GEOMETRÍA DIFERENCIAL

(AULA 32) 02.MAYO.2024

# Campos Tangentes

Sea  $S$  una hipersuperficie en  $\mathbb{R}^{n+1}$ , parametrizada por  $\mathbf{x} : U \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$ .

## Definición

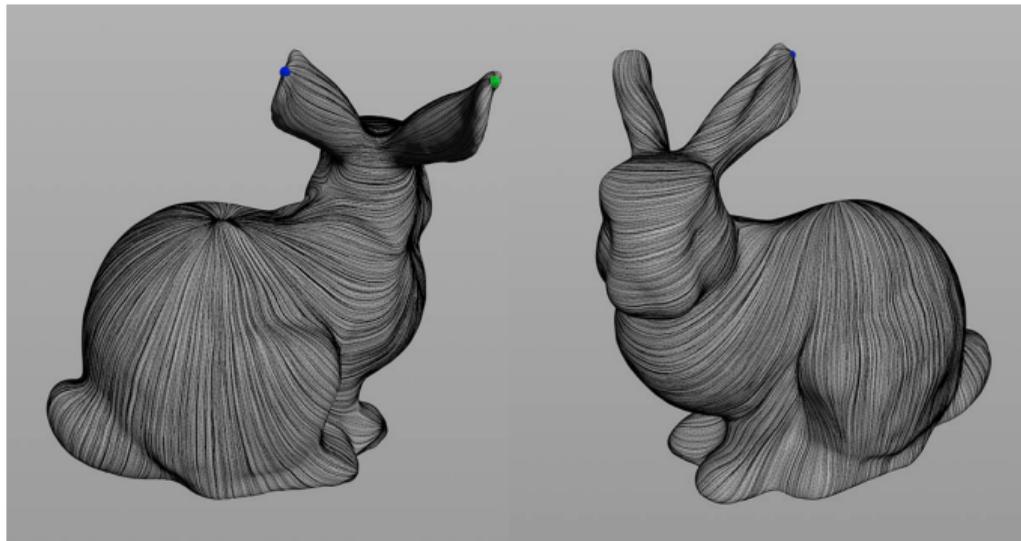
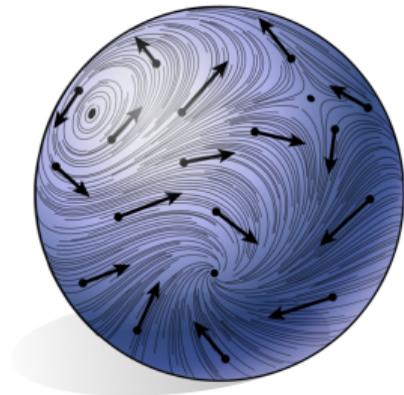
Un **campo de vectores tangente** a  $S$  es un mapa  $X : S \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$  tal que  $X(\mathbf{p}) \in T_{\mathbf{p}}S$ .  
Decimos que  $X$  es **diferenciable** si  $X \circ \mathbf{x} : U \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$  es diferenciable para toda parametrización  $\mathbf{x}$  de  $S$ .

Escribimos

$$X = \sum_i \xi_i \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial u_i} = \sum_i \xi_i \mathbf{x}_i, \quad X(\mathbf{p}) = (\xi_1(\mathbf{p}), \dots, \xi_n(\mathbf{p})),$$

la representación de  $X$  en la base canónica local de  $T_{\mathbf{p}}S$ .  $X$  es **de clase  $C^k$** , si las  $\xi_i = \xi_i(\mathbf{p})$  son todas de clase  $C^k$ .

# Campos Tangentes



Ejemplos de campos vectoriales tangentes a superficies.

# La Derivada Covariante

Recordemos de cálculo que en un espacio ambiente  $\mathbb{R}^{n+1}$  tenemos la noción de derivada direccional (de funciones)

$$D_{\mathbf{v}}f(\mathbf{x}) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(\mathbf{x} + t\mathbf{v}) - f(\mathbf{x})}{t}.$$

Nos interesa desarrollar una noción de derivada direccional para campos vectoriales. En el caso de superficies, esta derivada aplicada a campos tangenciales (en el plano tangente), puede tener una componente normal, y perdería el carácter intrínseco.

El concepto de *derivada covariante* pretende dar una noción de derivada direccional, pero manteniendo la propiedad intrínseca.

# La Derivada Covariante

## Definición

Sea  $Y : U \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$  un campo vectorial diferenciable, y sea  $X$  un vector direccional sobre un punto  $\mathbf{p} \in U$  fijo, esto es  $(\mathbf{p}, X) \in T_{\mathbf{p}}\mathbb{R}^{n+1}$ . La expresión

$$D_X Y(\mathbf{p}) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{Y(\mathbf{p} + tX) - Y(\mathbf{p})}{t}$$

se llama la **derivada direccional** de  $Y$  en la dirección de  $X$ .

## Propiedad

$D_X Y(\mathbf{p})$  está únicamente determinada por el valor de  $Y$  a lo largo de una curva diferenciable  $\gamma : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$ , con  $\gamma(0) = \mathbf{p}$  y  $\gamma'(0) = X$ :

$$D_X Y(\mathbf{p}) = \left. \frac{d}{dt} (Y \circ \gamma)(t) \right|_{t=0} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{Y(\gamma(t)) - Y(\mathbf{p})}{t}.$$

# La Derivada Covariante

## Consecuencias:

- Las derivadas parciales de  $Y$  corresponden al caso  $X = \mathbf{e}_i$ , con  $\{\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n\}$  la base canónica de  $\mathbb{R}^n$ . Tenemos así  $D_{\mathbf{e}_i} Y = \frac{\partial Y}{\partial x_i}$ .  
En particular, si  $X = \sum_i X_i \mathbf{e}_i$ , entonces

$$D_X Y(\mathbf{p}) = \sum_i X_i D_{\mathbf{e}_i} Y = \sum_i X_i \frac{\partial Y}{\partial x_i}.$$

- Para una hipersuperficie  $n$ -dimensional  $S$ , dada por  $\mathbf{x} : U \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$  denotemos  $Y$  un campo vectorial diferenciable a lo largo de  $\mathbf{x}$ , y  $X$  un vector tangente a  $\mathbf{p} = \mathbf{x}(\mathbf{q}) \in S$ . Entonces,

$$D_X Y(\mathbf{p}) = D_{(D\mathbf{x})^{-1}(\mathbf{p}) \cdot X} Y(\mathbf{q}) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{(Y(\mathbf{q} + t(D\mathbf{x})^{-1}(\mathbf{p}) \cdot X)) - Y(\mathbf{q})}{t}.$$

# La Derivada Covariante

En este caso,  $\gamma(t) = \mathbf{x}(\mathbf{q} + t(D\mathbf{x})^{-1}(\mathbf{p}) \cdot X)$  es una curva sobre  $S$  tal que  $\gamma'(0) = X$ .

- La derivada de una función en la dirección de la  $i$ -ésima coordenada  $u_i$  es precisamente  $D_{\mathbf{e}_i} \mathbf{x} = \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial u_i} = \mathbf{x}_i$ .

Se sigue que

$$D_{\frac{\partial \mathbf{x}}{\partial u_i}} Y(\mathbf{p}) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} (Y(u_1, \dots, u_i + t, \dots, u_n) - Y(u_1, \dots, u_i, \dots, u_n)).$$

En particular,

$$D_{\frac{\partial \mathbf{x}}{\partial u_i}} \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial u_j} = \frac{\partial^2 \mathbf{x}}{\partial u_i \partial u_j}.$$

# La Derivada Covariante

## Definición

Si  $X, Y$  son campos vectoriales tangentes a una hipersuperficie  $S$ , parametrizada por  $\mathbf{x} : U \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$ , entonces

$$\nabla_X Y = (D_X Y)^T = D_X Y - \langle D_X Y, N \rangle N,$$

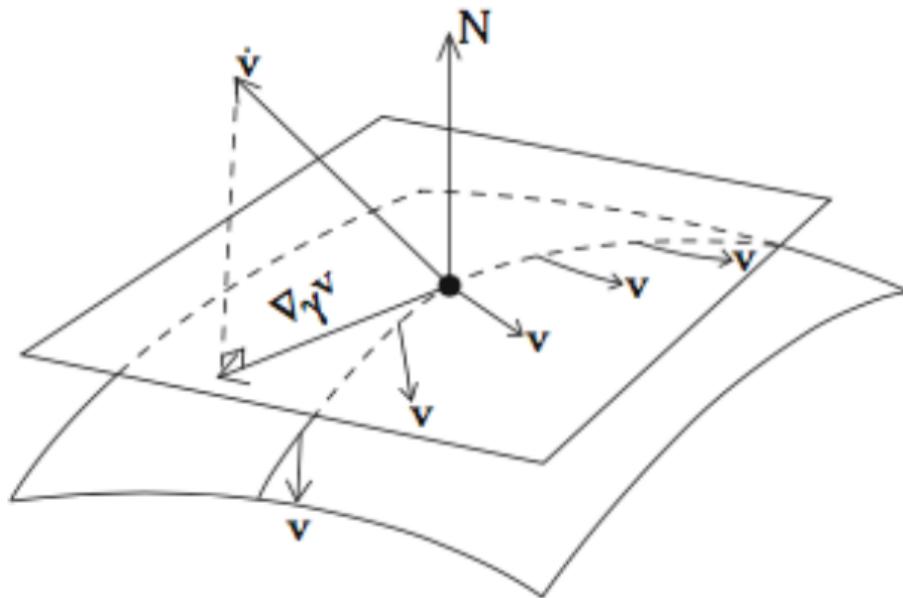
donde  $N$  es el campo normal unitario a  $S$ , se llama la **derivada covariante** de  $Y$  en la dirección de  $X$ .

**Obs!**  $\nabla_X Y$  es también un campo vectorial tangente. La componente normal a  $D_X Y$  es la segunda forma fundamental de  $\mathbf{x}$ , ya que la igualdad  $\langle Y, N \rangle = 0 \Rightarrow \langle D_X Y, N \rangle = II(X, Y)$ . En consecuencia  $\langle D_X Y, N \rangle = -\langle Y, D_X N \rangle$ .

Podemos escribir entonces

$$D_X Y = D_X Y^T + D_X Y^\perp = \nabla_X Y + II(X, Y)N.$$

# La Derivada Covariante



La derivada covariante  $\nabla_\gamma \mathbf{v}$  sobre  $S$ .

# La Derivada Covariante

## Observaciones:

- En el libro de Do Carmo, la derivada covariante se denota por  $D$ .
- Es importante diferenciar entre ambos operadores diferenciales  $D$  y  $\nabla$  (derivada direccional y derivada covariante):  $D$  está definida para campos vectoriales en el espacio ambiente  $\mathbb{R}^{n+1}$ , mientras que  $\nabla$  sólo está definida para campos vectoriales tangentes a  $S$ .
- Para una función escalar  $\varphi$ , se tiene  $D_X\varphi = \nabla_X\varphi$  (en general para campos vectoriales,  $D_XY \neq \nabla_XY$ ).  
Podemos multiplicar tales funciones escalares, punto a punto, con campos vectoriales:

$$\varphi X \text{ denota } \mathbf{p} \rightarrow (\varphi X)(\mathbf{p}) = \varphi(\mathbf{p}) X(\mathbf{p}).$$

## Proposición (Propiedades de $D$ y de $\nabla$ )

- $$\begin{aligned} D_{\varphi_1 X_1 + \varphi_2 X_2} Y &= \varphi_1 D_{X_1} Y + \varphi_2 D_{X_2} Y, \\ \nabla_{\varphi_1 X_1 + \varphi_2 X_2} Y &= \varphi_1 \nabla_{X_1} Y + \varphi_2 \nabla_{X_2} Y. \end{aligned} \quad \text{(linealidad)}$$
- $$\begin{aligned} D_X(Y_1 + Y_2) &= D_X Y_1 + D_X Y_2, \\ \nabla_X(Y_1 + Y_2) &= \nabla_X Y_1 + \nabla_X Y_2. \end{aligned} \quad \text{(aditividad)}$$
- $$\begin{aligned} D_X(\varphi Y) &= \varphi D_X Y + D_X \varphi Y, \\ \nabla_X(\varphi Y) &= \varphi \nabla_X Y + \nabla_X \varphi Y. \end{aligned} \quad \text{(regla del producto)}$$
- $$\begin{aligned} D_X \langle Y_1, Y_2 \rangle &= \langle D_X Y_1, Y_2 \rangle + \langle Y_1, D_X Y_2 \rangle, \\ \nabla_X \langle Y_1, Y_2 \rangle &= \langle \nabla_X Y_1, Y_2 \rangle + \langle Y_1, \nabla_X Y_2 \rangle. \end{aligned} \quad \text{(regla de Leibniz)}$$

# La Derivada Covariante

La conmutatividad falla: en general  $D_X Y \neq D_Y X$  y  $\nabla_X Y \neq \nabla_Y X$ .

Ejemplo: Sean  $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2$  la base canónica de  $\mathbb{R}^2$ , con coordenadas  $(x_1, x_2)$ . Observe que

$$D_{\mathbf{e}_i} \mathbf{e}_j = \mathbf{0}.$$

Eligiendo  $X = x_1 \mathbf{e}_2 = (0, x_1)$ , y  $Y = \mathbf{e}_1 = (1, 0)$ , se tiene

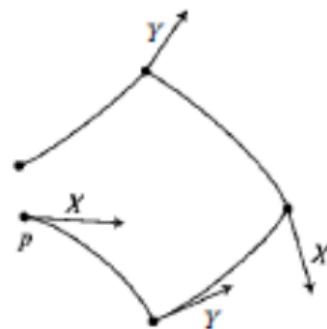
$$D_X Y = D_{x_1 \mathbf{e}_2} \mathbf{e}_1 = x_1 D_{\mathbf{e}_2} \mathbf{e}_1 = \mathbf{0},$$

$$D_Y X = D_{\mathbf{e}_1} (x_1 \mathbf{e}_2) = x_1 D_{\mathbf{e}_1} \mathbf{e}_2 + D_{\mathbf{e}_1} x_1 \mathbf{e}_2 = \frac{\partial x_1}{\partial x_1} \mathbf{e}_2 = \mathbf{e}_2.$$

## Definición

Para dos campos vectoriales  $X, Y$  sobre una hipersuperficie  $S$ , definimos el **corchete de Lie** (ó **Lie bracket**) de  $X$  y  $Y$  como

$$[X, Y] = D_X Y - D_Y X.$$



# La Derivada Covariante

- Si  $X, Y$  son campos tangentes, se tiene  $[X, Y] = \nabla_X Y - \nabla_Y X$ .
- Si  $\mathbf{x}$  es de clase  $C^2$ , vale

$$\left[ \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial u_i}, \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial u_j} \right] = \frac{\partial^2 \mathbf{x}}{\partial u_i \partial u_j} - \frac{\partial^2 \mathbf{x}}{\partial u_j \partial u_i} = \mathbf{0}.$$

- En coordenadas arbitrarias, si  $X = \sum_i \xi_i \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial u_i}$ ,  $Y = \sum_i \eta_i \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial u_i}$ , entonces

$$[X, Y] = \sum_{i,j} \left( \xi_i \frac{\partial \eta_j}{\partial u_i} - \eta_i \frac{\partial \xi_j}{\partial u_i} \right) \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial u_j}.$$

Esto se abrevia por  $[X, Y]_j = X(Y_j) - Y(X_j)$ .

- Una condición necesaria para que  $X$  y  $Y$  sean campos base  $X = \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial u_i}$ ,  $Y = \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial u_j}$  (i.e. formen una base en cada punto de  $S$ ) es que  $[X, Y] = \mathbf{0}$ .

# La Derivada Covariante

## Teorema

La derivada covariante  $\nabla$  es una cantidad intrínseca: sólo depende de la primera forma fundamental.

Prueba:

Sean  $X = \sum_j \xi_j \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial u_j}$ ,  $Y = \sum_j \eta_j \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial u_j}$ . Para determinar  $\nabla_X Y$ , es suficiente conocer  $\langle \nabla_X Y, \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial u_k} \rangle$ ,  $\forall k$ . De las propiedades de  $\nabla$  tenemos

$$\begin{aligned}\nabla_X Y &= \sum_i \xi_i \nabla \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial u_i} Y = \sum_i \xi_i \sum_j \nabla \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial u_i} \left( \eta_j \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial u_j} \right) \\ &= \sum_{i,j} \xi_i \left( \frac{\partial \eta_j}{\partial u_i} \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial u_j} + \eta_j \nabla \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial u_i} \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial u_j} \right).\end{aligned}$$

# La Derivada Covariante

En consecuencia,

$$\begin{aligned}\left\langle \nabla_X Y, \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial u_k} \right\rangle &= \sum_{i,j} \xi_i \left( \frac{\partial \eta_j}{\partial u_i} \left\langle \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial u_j}, \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial u_k} \right\rangle + \eta_j \left\langle \nabla \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial u_i} \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial u_j}, \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial u_k} \right\rangle \right) \\ &= \sum_{i,j} \xi_i \left( \frac{\partial \eta_j}{\partial u_i} \langle \mathbf{x}_j, \mathbf{x}_k \rangle + \eta_j \langle \mathbf{x}_{ij}, \mathbf{x}_k \rangle \right) = \sum_{i,j} \xi_i \left( \frac{\partial \eta_j}{\partial u_i} g_{jk} + \eta_j \Gamma_{ij,k} \right)\end{aligned}$$

Se suele usar la notación  $\Gamma_{ij,k} = \left\langle \nabla \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial u_i} \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial u_j}, \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial u_k} \right\rangle = \langle \mathbf{x}_{ij}, \mathbf{x}_k \rangle$ . Ya mostramos (ver Aula 23) que

$$\Gamma_{ij,k} = \frac{1}{2} (\partial_i g_{jk} + \partial_j g_{ik} - \partial_k g_{ij}). \quad \square$$

**Obs!** En la notación de Einstein, esto es  $\langle \nabla_X Y, \mathbf{x}_k \rangle = \xi^i \left( \frac{\partial \eta^j}{\partial u_i} g_{jk} + \eta^j \Gamma_{ij}^\ell g_{\ell k} \right)$ .

# Símbolos de Christoffel, versión general

Para hipersuperficies en  $\mathbb{R}^{n+1}$ , tenemos

## Definición

i) Las cantidades

$$\Gamma_{ij,k} = \left\langle \nabla \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial u_i}, \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial u_j}, \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial u_k} \right\rangle = \langle \mathbf{x}_{ij}, \mathbf{x}_k \rangle,$$

se llaman los **símbolos de Christoffel del primer tipo**.

ii) Las cantidades  $\Gamma_{ij}^k$  definidas por

$$\mathbf{x}_{ij}^T = \nabla \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial u_i} \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial u_j} = \sum_k \Gamma_{ij}^k \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial u_k},$$

se llaman los **símbolos de Christoffel del segundo tipo**.

**Obs!** Vimos que (Aula 23), estas cantidades satisfacen  $\Gamma_{ij}^k = \Gamma_{ji}^k$ ,  $\Gamma_{ij,k} = \Gamma_{ji,k}$  y

$$\Gamma_{ij,k} = \sum_{\ell} \Gamma_{ij}^{\ell} g_{\ell k}.$$

# Símbolos de Christoffel

En consecuencia,

$$\nabla_X Y = \sum_{i,k} \xi_i \left( \frac{\partial \eta_k}{\partial u_i} + \sum_j \eta_j \Gamma_{ij}^k \right) \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial u_k}. \quad (1)$$

En notación compacta, esto es

$$\nabla_X Y = \xi^i \left( \frac{\partial \eta^k}{\partial u_i} + \eta^j \Gamma_{ij}^k \right) \mathbf{x}_k.$$

# Ecuación de las geodésicas

Consideremos ahora  $\alpha : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow S$  una curva diferenciable sobre una superficie  $S$ , parametrizada por  $\mathbf{x} : U \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$ , y sea  $\alpha(0) = \mathbf{p}$ .

## Definición

Sea  $X$  un campo vectorial tangente a  $S$ . La **derivada covariante** de  $X$  a lo largo de  $\alpha$  es

$$\nabla_{\alpha} X(\mathbf{p}) = \left. \frac{d}{dt}(X \circ \alpha)(t) \right|_{t=0} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{X(\alpha(t)) - X(\mathbf{p})}{t}.$$

En particular, como  $\alpha'$  define un campo vectorial tangente a  $S$ , definido sobre la trayectoria de  $\alpha$ , podemos escribir

$$\nabla_{\alpha} \alpha' = (\alpha'')^T, \text{ la componente tangencial de la aceleración de } \alpha.$$

# Ecuación de las geodésicas

De la teoría de geodésicas desarrollada en la clase anterior (Aula 31), tenemos

## Teorema (Caracterización de las geodésicas)

$\alpha : [a, b] \rightarrow S$  es una geodésica, si y sólo si,

$$\nabla_{\alpha} \alpha'(t) = \mathbf{0}, \quad \forall t \in [a, b].$$

Prueba: Basta recordar que

$$\alpha \text{ es geodésica} \Leftrightarrow \alpha''(t) \in T_{\alpha(t)} S^{\perp} \Leftrightarrow \nabla_{\alpha} \alpha'(t) = (\alpha''(t))^T = \mathbf{0}, \quad \forall t. \quad \square$$

# Ecuación de las geodésicas

Sean  $X = \sum_i \xi_i \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial u_i}$ , y  $\alpha(t) = \sum_i \mathbf{a}_i(t) \mathbf{e}_i$  las coordenadas de la curva  $\alpha$ . Entonces

$$\begin{aligned}\nabla_{\alpha} X &= ((X \circ \alpha)'(t))^T = \left( \sum_i [\xi_i \mathbf{x}_i(\alpha(t))] \right)'^T \\ &= \sum_i \left( \xi_i' \mathbf{x}_i(\alpha(t)) + \xi_i \sum_j (\mathbf{x}_i)_j \mathbf{a}_j'(t) \right)^T \\ &= \sum_i (\xi_i' \mathbf{x}_i)^T(\alpha(t)) + \sum_{i,j} (\xi_i \mathbf{a}_j'(t) \mathbf{x}_{ij})^T \\ &= \sum_k \xi_k' \mathbf{x}_k + \sum_{i,j} \xi_i \mathbf{a}_j' \sum_k \Gamma_{ij}^k \mathbf{x}_k \\ &= \sum_k \left( \xi_k' + \sum_{i,j} \xi_i \mathbf{a}_j' \Gamma_{ij}^k \right) \mathbf{x}_k.\end{aligned}$$

# Ecuación de las geodésicas

En particular, cuando  $X = \alpha'$ , se tiene que

$$\nabla_{\alpha} \alpha' = \sum_k \left( a''_k + \sum_{i,j} a'_i a'_j \Gamma_{ij}^k \right) \mathbf{x}_k.$$

Hemos probado

## Corolario (Ecuación de las Geodésicas)

Una curva  $\alpha : [a, b] \rightarrow S$  es una geodésica, si y sólo si

$$\sum_k \left( a''_k + \sum_{i,j} a'_i a'_j \Gamma_{ij}^k \right) \mathbf{x}_k = \mathbf{0}. \quad (2)$$

Esto es,  $\alpha$  es geodésica  $\Leftrightarrow$  vale el sistema de EDO  $a''_k + \Gamma_{ij}^k (a^i)' (a^j)' = 0$ , para  $k = 1, 2, \dots, n$ .

# Ecuación de las geodésicas

## Geodesic Equation of Motion

Curvature of trajectory

Generalized gradient

$$\frac{d^2 x^a}{ds^2} + \Gamma_{bc}^a \frac{dx^b}{ds} \frac{dx^c}{ds} = 0$$

Christoffel symbol

Path length element