Geodésicas I

Alan Reyes-Figueroa
Geometría Diferencial

(Aula 31) 30.abril.2024

La vecindad tubular

Sea S una superficie. Dado que $\mathbb{R}^3$ es un espacio métrico, las vecindades más fáciles de construir para S son los llamados vecindarios métricos

$$B_\delta(S) = \{\mathbf{p} \in \mathbb{R}^3 : \ \text{dist}(\mathbf{p}, S) < \delta\},$$

donde $\text{dist}(\mathbf{p}, S) = \inf_{\mathbf{q} \in S} |\mathbf{p} - \mathbf{q}|$.

Está claro que $B_\delta(S)$ es una vecindad abierta de S para cada $\delta > 0$. Una primera observación es que estas vecindades consisten en segmentos de líneas normales con longitud 2δ centrada en los puntos de la superficie.
(Lema 4.23 en el libro de Montiel y Ros).

Esta descripción geométrica de las vecindades métricas de un superficie sugiere lo siguiente:

La vecindad tubular

Si podemos arreglar que los segmentos de rectas normales involucradas no se cruzan, entonces podremos establecer que estos vecindarios son productos topológicos de la superficie y un intervalo de $\mathbb{R}$. Esto, de hecho, puede hacerse si el radio es lo suficientemente pequeño.

Para una superficie orientable S, esto se puede hacer mediante el mapa $F : S \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$, dado por

$$F(\mathbf{p}, t) = \mathbf{p} + tN(\mathbf{p}), \quad \forall (\mathbf{p}, t) \in S \times \mathbb{R},$$

donde $N : S \to S^2 \subset \mathbb{R}^3$ es un mapa de Gauss de S. Este mapa F es diferenciable, y envía cada par $(\mathbf{p}, t)$ al punto a la distancia t en la línea normal de S en $\mathbf{p}$, en el lado de la superficie a la que apunta $N(\mathbf{p})$. De ahí que

$$F(S \times (-\delta, \delta)) = N_\delta(S) = \bigcup_{\mathbf{p} \in S} N_\delta(\mathbf{p}), \quad \forall \delta > 0.$$

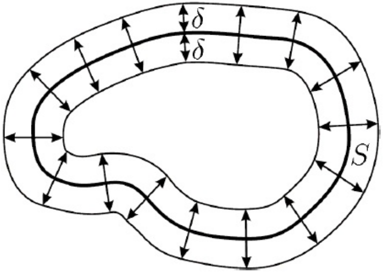
Ahora, que los segmentos normales de radio δ no se toquen entre sí es equivalente a que el mapa F sea inyectivo en $S \times (-\delta, \delta)$.

Definición

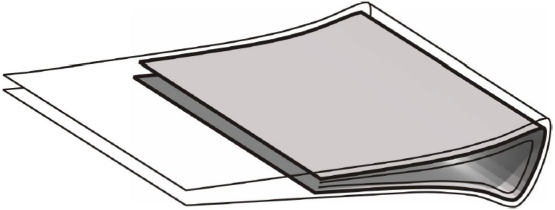
La unión $N_\delta(S)$ de todos los segmentos normales de radio $\delta > 0$ centrados en los puntos de una superficie orientable S se llama la ***vecindad tubular*** *de radio $\delta > 0$ si esta es abierta como un subconjunto de $\mathbb{R}^3$.*
En ese caso, el mapa $F : S \times (-\delta, \delta) \to N_\delta(S)$ es un difeomorfismo.

$N_\delta(S)$ viene acompañado de dos proyecciones $\pi_1 : N_\delta(S) \to S$ dada por $(\mathbf{p}, t) \to \mathbf{p}$, y $\pi_2 : N_\delta(S) \to \mathbb{R}^3$ dada por $(\mathbf{p}, t) \to tN(\mathbf{p})$.
Las superficies $S^t = S + tN = \pi_2^{-1}(\cdot, t)$ son las *superficies paralelas* a S.

La vecindad tubular



La vecindad tubular $N_\delta(S)$.



Vecindad tubular de una superficie.

(Para más detalles, ver capítulo 4 de libro de Montiel y Ros.)

Variación de curvas

Queremos estudiar ahora las curvas sobre una superficie S que minimizan (localmente) la longitud de arco.

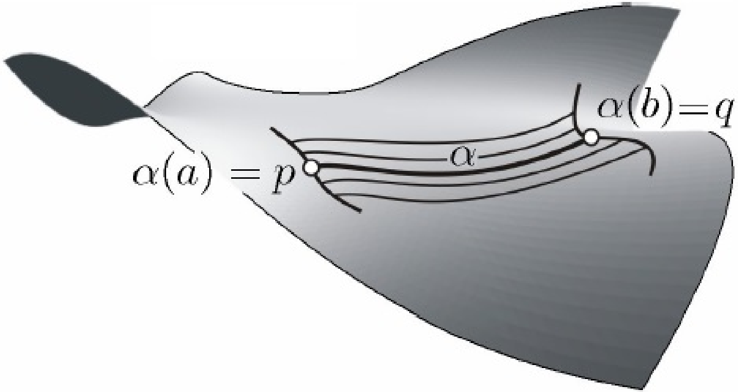
Definición

*Sea $S \subset \mathbb{R}^3$ superficie regular, y sea $\alpha : [a, b] \to S$, una curva sobre S. Una **variación** de la curva α es un mapa diferenciable $F : [a, b] \times (-\varepsilon, \varepsilon) \to S$ tal que $F(s, 0) = \alpha(s)$, $\forall s \in [a, b]$.*

*Para cada $t \in (-\varepsilon, \varepsilon)$, tenemos una curva $F_t : [a, b] \to S$ dada por $F_t(s) = F(s, t)$. F_t se llama una **curva longitudinal** de la variación F.*

*Cuando todas estas curvas tiene extremos comunes, esto es, $F(a, t) = \mathbf{p}$, $F(b, t) = \mathbf{q}$, $\forall t \in (-\varepsilon, \varepsilon)$, decimos que la variación F es **propia**.*

Variación de curvas



Variación de una curva α sobre S.

UVG UNIVERSIDAD DEL VALLE DE GUATEMALA

Asociado a una variación F, definimos $V : [a,b] \to \mathbb{R}^3$ por

$$V(s) = \frac{\partial F}{\partial t}(s,0) = \frac{d}{dt}F(s,t)\Big|_{t=0}.$$

V es también diferenciable, y además, $V(s) \in T_{\alpha(s)}S$, $\forall s \in [a,b]$. El mapa V se llama el **campo variacional** de F. Claramente, si F es propia, entonces $V(a) = V(b) = 0$.

Mostramos ahora que las variaciones y sus campos variacionales asociados mantienen una relación más profunda.

Proposición

Sea $\alpha : [a, b] \to S$ una curva diferenciable sobre S, y $V : [a, b] \to \mathbb{R}^3$ un mapa diferenciable tal que $V(s) \in T_{\alpha(s)}S$, $\forall s \in [a, b]$. Entonces, existe $\varepsilon > 0$ y una variación $F : [a, b] \times (-\varepsilon, \varepsilon) \to S$ de α cuyo campo variacional es V. Más aún, si $V(a) = V(b) = 0$, F puede elegirse propia.

Prueba: Como el trazo $K = \alpha([a, b])$ es un compacto en S, existe una vecindad $K \subset W \subseteq S$ y un número $\delta > 0$ tales que existe una proyección diferenciable $\pi : N_\delta(W) \to W$ proveniente de la vecindad tubular $N_\delta(W)$.

Como $N_\delta(W)$ es un abierto en $\mathbb{R}^3$ que contiene al compacto K, existe $\varepsilon' > 0$ tal que $\text{dist}(\mathbf{p}, K) < \varepsilon' \;\Rightarrow\; \mathbf{p} \in N_\delta(W)$. Hacemos $\varepsilon = \frac{\varepsilon'}{1+M}$, $M = sup_{s\in[a,b]}|V(s)|$.

Variación de curvas

Así, si $s \in (-\varepsilon, \varepsilon)$, se tiene

$$\text{dist}(\alpha(s) + tV(s), K) \leq |tV(s)| = t|V(s)| \leq \varepsilon' M < \varepsilon, \quad \forall s \in [a, b].$$

Luego $\alpha(s) + tV(s) \in N_\delta(W)$, $\forall (s, t) \in [a, b] \times (-\varepsilon, \varepsilon)$. Definimos la variación requerida como $F : [a, b] \times (-\varepsilon, \varepsilon) \to S$ como

$$F(s, t) = \pi\big(\alpha(s) + tV(s)\big), \quad \forall [a, b] \times (-\varepsilon, \varepsilon).$$

F es diferenciable, y si $t = 0$, se tiene $F(s, 0) = \pi(\alpha(s)) = \alpha(s)$, ya que $\alpha(s) \in S$. El campo variacional es

$$\frac{\partial F}{\partial t}(s, 0) = \frac{d}{dt}\pi\big(\alpha(s) + tV(s)\big)\Big|_{t=0} = D\pi_{\alpha(s)} \cdot V(s) = V(s),$$

ya que $\alpha(s) \in S$, $V(s) \in T_{\alpha(s)}S$, y $D\pi$, restricta al plano tangente sobre puntos de la superficie, es la identidad.

Finalmente, si $V(a) = V(b) = 0$, entonces

$$F(a,t) = \pi(\alpha(a) + tV(a)) = \pi(\alpha(a)) = \alpha(a),$$

para $t \in (-\varepsilon, \varepsilon)$. Análogamente $F(b,t) = \pi(\alpha(b) + tV(b)) = \alpha(b)$, $\square$

Definición

*Sea $S \subset \mathbb{R}^3$ superficie orientable, $\mathbf{p} \in S$. Dado un vector $\mathbf{v}$ anclado a $\mathbf{p}$, definimos la **componente tangencial** $\mathbf{v}^T$ del $\mathbf{v}$ en $\mathbf{p}$ como la proyección de $\mathbf{v}$ sobre el plano tangente T, y la **componente normal** como la proyección de $\mathbf{v}$ sobre el segmento normal $\langle N(\mathbf{p})\rangle$:*

$$\mathbf{v}^T = \mathrm{proj}_{T_{\mathbf{p}}S}\,\mathbf{v}, \quad \mathbf{v}^\perp = \mathrm{proj}_{N(\mathbf{p})}\,\mathbf{v}.$$

Obs! Todo vector $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^3$ se descompone como $\mathbf{v} = \mathbf{v}^T + \mathbf{v}^\perp$.

Variación de curvas

Asociamos a cada variación $F : [a, b] \times (-\varepsilon, \varepsilon) \to S$ de la curva $\alpha = F_0$ una función $L_F : (-\varepsilon, \varepsilon) \to \mathbb{R}$ por

$$L_F(t) = \ell_a^b(F_t) = \int_a^b |F_t'(s)|\, ds = \int_a^b \left| \frac{\partial F}{\partial s}(s, t) \right| ds.$$

Esta es la **función de longitud** (de arco) de la varaición F. Observe que $L_F(0) = \ell_a^b(\alpha)$ para cada variación F.

Ahora suponga que α está parametrizada por longitud de arco. Definimos $G : [a, b] \times (-\varepsilon, \varepsilon) \to \mathbb{R}$ por

$$G(s, t) = \left| \frac{\partial F}{\partial s}(s, t) \right|.$$

G es continua y $G(s, 0) = |\alpha'(s)| = 1 > 0$, $\forall s \in [a, b]$. Por la continuidad de

Variación de curvas

G, existe δ con $0 < \delta < \varepsilon$ y tal que $|t| < \delta \;\Rightarrow\; G(s,t) > 0$, $\forall s \in [a,b]$. Entonces $G|_{[a,b]\times(-\delta,\delta)} > 0$ y diferenciable. En consecuencia, la longitud de la variación F, restricta a $L_F : [a,b] \times (-\delta,\delta) \to \mathbb{R}$ es diferenciable y

$$L_F'(t) = \frac{d}{dt}\int_a^b \left|\frac{\partial F}{\partial s}(s,t)\right| ds = \int_a^b \frac{\partial G}{\partial t}(s,t)\, ds,$$

para todo $t \in (-\delta,\delta)$.

El propósito ahora es calcular $L_F(0)$. Para ello, observe que

$$\frac{\partial G}{\partial t}(s,0) = \Big\langle \frac{\partial F}{\partial s}, \frac{\partial^2 F}{\partial t \partial s} \Big\rangle(s,0), \quad \forall s \in [a,b]. \tag{1}$$

(pues $\frac{\partial}{\partial t}G = \frac{\partial}{\partial t}|F'| = \frac{\partial}{\partial t}\langle F', F'\rangle^{1/2} = \frac{1}{2}\frac{2\langle \partial_t F', F'\rangle}{|F'|} = \langle \partial^2_{ts}F, \partial_s F\rangle$).

Teorema (Primera variación de la longitud)

Sea $\alpha : [a, b] \to S$ una curva parametrizada por longitud de arco, y sea $F : [a, b] \times (-\delta, \delta) \to S$ una variación de α. Si L_F es la función de longitud, entonces

$$L'_F(0) = \langle V(b), \alpha'(b)\rangle - \langle V(a), \alpha'(a)\rangle - \int_a^b \langle V(s), \alpha''(s)\rangle\, ds.,$$

Prueba: De (1)

$$\begin{aligned} L'_F(0) &= \int_a^b \Big\langle \frac{\partial^2 F}{\partial t \partial s}, \frac{\partial F}{\partial s}\Big\rangle(s,0)\, ds \\ &= \Big\langle \frac{\partial F}{\partial t}, \frac{\partial F}{\partial s}\Big\rangle\Big|_{(a,0)}^{(b,0)} - \int_a^b \Big\langle \frac{\partial F}{\partial t}, \frac{\partial^2 F}{\partial s^2}\Big\rangle(s,0)\, ds \\ &= \langle V(b), \alpha'(b)\rangle - \langle V(a), \alpha'(a)\rangle - \int_a^b \langle V(s), \alpha''(s)\rangle\, ds \end{aligned}$$

(Recordar que $\frac{\partial F}{\partial s}(s,0) = \alpha(s)$, $\frac{\partial^2 F}{\partial s^2}(s,0) = \alpha''(s)$, $\frac{\partial F}{\partial t}(s,0) = V(t)$). $\square$

Estamos interesados en caracterizar las geodésicas sobre S, esto es las curvas que localmente minimizan la longitud de arco. Esto lo podemos caracterizar en términos de la función de longitud L_F.

Corolario (Caracterización de las geodésicas)

Una curva regular $\alpha : [a, b] \to S$ sobre una superficie S tiene longitud crítica, esto es

$$L'_F(0) = 0,$$

para toda variación propia F si, y sólo si, $\alpha''(s) \perp \alpha(s)$, $\forall s \in [a, b]$, o equivalentemente $\alpha''(s) \in T_{\alpha(s)}S^{\perp}$.
En otras palabras, si y sólo si, su aceleración tangencial $\alpha''(s)^T$ es proporcional a la velocidad $\alpha(s)$. Si α está parametrizada por longitud de arco, esto es equivalente al hecho que $\alpha''(s)^T = 0$, $\forall s$.

Prueba: Suponga que está parametrizada por longitud de arco $|\alpha'(s)|^2 = 1$, y la aceleración $\alpha''(s)$ es perpendicular a $\alpha'(s)$, pues $2\langle\alpha''(s), \alpha'(s)\rangle = \frac{d}{ds}|\alpha'(s)|^2 = 0$, $\forall s$. De ahí que las condiciones $\alpha''(s) \perp \alpha'(s)$ y $\alpha''(s)^T = 0$ sean equivalentes.

($\Rightarrow$) Por el Teorema de Primera Variación, si $L_F'(0) = 0$ para toda variación propia de α, entonces

$$\int_a^b \langle V(s), \alpha''(s)\rangle \, ds = 0,$$

y de la proposición previa, existe una variación propia cuyo campo variacional es $V(s) = h(s)\alpha''(s)^T$, donde h es alguna función difefrenciable en $[a, b]$, positiva en (a, b), y con $h(a) = h(b) = 0$. Luego,

$$\int_a^b h(s)|\alpha''(s)^T|^2\,ds = 0.$$

De ahí que $\alpha''(s)^T = 0$, $\forall s$ y la aceleración $\alpha''(s) \in T_{\alpha(s)}S^{\perp}$.

($\Leftarrow$) Recíprocamente, si la curva α está parametrizada por longitud de arco, y satisface $\alpha''(s)^T = 0$, $\forall s \in [a, b]$, entonces la fórmula de la primera variación de la longitud implica que

$$\int_a^b \langle V(s), \alpha''(s)\rangle\,ds = 0,$$

pues $V(s) \in T_{\alpha(s)}S$. Portanto, $L_F'(0) = 0$ para toda variación propia F de α. $\square$

Definición

*Una curva diferenciable $\alpha : [a, b] \to S$ sobre una superficie regular S se llama una **geodésica** si*

$$\alpha''(s) \perp T_{\alpha(s)}S, \quad \forall s \in [a, b].$$

Obs!:

- Desde el punto de vista físico, sobre la superficie, una geodésica es el camino de una partícula que no está sujeta a ninguna perturbación exterior, y actua sólo bajo las leyes de Newton.
- Una geodésica, puede o no satisfacer la propiedad de minimizar la longitud de arco desde a hasta b. (No lo requiere la definición).

Propiedad

Si $\alpha : [a, b] \to S$ es geodésica, entonces $\frac{d}{ds}|\alpha'(s)|^2 = 2\langle\alpha''(s), \alpha'(s)\rangle = 0$. Luego, toda geodésica posee rapidez (magnitud) constante. $\square$

En consecuencia, toda geodésica o es una curva constante, o está parametrizada proporcionalmente a la longitud de arco.

Obs!

- Ser geodésica no es una propiedad geométrica (es una propiedad de curvas que depende de la parametrización). Al contrario, es una propiedad física.
- Si reparametrizamos una geodésica, la nueva curva obtenida también es geodésica si, y sólo si, la reparametrización es homotética.

Teorema (Invarianza por isometrías)

Sea $T : S \to S'$ una isometría local entre dos superficies S y S', y sea $\alpha : [a, b] \to S$ una curva diferenciable sobre S. Entonces α es una geodésica sobre S si, y sólo si, $\alpha' = T \circ \alpha$ es una geodésica sobre S'.

Prueba:
Si α es geodésica sobre S, sea $G : [a, b] \times (-\delta, \delta) \to S'$ una variación de α' sobre S', con $\delta > 0$. Entonces, $F = T^{-1} \circ G$ es una variación de α.
Mas aún, como T^{-1} preserva longitudes, se tiene que

$$L_F(t) = \ell_a^b(F_t) = \ell_a^b(T^{-1} \circ G_t) = \ell_a^b(G_s) = L_G(t),$$

para todo $t \in (-\delta, \delta)$. Luego, $L'_G(0) = L'_F(0) = 0$ y $\alpha' = T \circ \alpha$ es geodésica en S'. La recíproca se prueba igual, intercambiando S por S', y usando T^{-1} en lugar de T. $\square$

Ejemplos

Ejemplo 1: (Geodésicas en el plano)

Sea $S = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 : \langle \mathbf{x}, \mathbf{n} \rangle = 0\}$ el plano de los vectores ortogonales a un vector unitario fijo $\mathbf{n} \in \mathbb{R}^3$. Si $\alpha : [a, b] \to S$ es una curva diferenciable arbitraria en S, tenemos $\langle \alpha'(t), \mathbf{n} \rangle = 0$, para cada $t \in [a, b]$.

Derivando dos veces, entonces $\langle \alpha''(t), \mathbf{n} \rangle = 0$, es decir, $\alpha(t) \in S = T_{\alpha(t)}S$, $\forall t \in [a, b]$. En particular $\alpha''(s)^T = \alpha''(s)$
Por tanto, α es geodésica si, y sólo si, $\alpha'' = (\alpha'')^T = \mathbf{0}$. Ya sabemos que la solución a esta EDO es, $\alpha(t) = t\mathbf{p} + \mathbf{q}$.

Por lo tanto, las geodésicas de un plano son sólo sus rectas (o segmentos de recta) parametrizadas proporcionalmente a la longitud del arco.

Ejemplos

Ejemplo 2: (Geodésicas en la esfera)

Sea $\alpha : [a, b] \to S_r^2$ una curva diferenciable sobre la esfera de radio $r > 0$, S_r^2, parametrizada por longitud de arco.

Tenemos $|\alpha(t) - \mathbf{p}|^2 = r^2$, para todo t. Diferenciando dos veces esta expresión, $2\langle \alpha'(t), \alpha(t) - \mathbf{p}\rangle = 0 \;\Rightarrow\; 2(\langle \alpha''(t), \alpha(t) - \mathbf{p}\rangle + \langle \alpha'(t), \alpha'(t)\rangle) = 0 \;\Rightarrow\; \langle \alpha''(t), \alpha(t) - \mathbf{p}\rangle = -1$. Como el plano $T_{\alpha(t)}S_r^2$ es el complemento ortogonal de $\alpha(s) - \mathbf{p}$, entonces

$$\alpha''(t)^T = \alpha''(t) + \tfrac{1}{r^2}(\alpha(t) - \mathbf{p}).$$

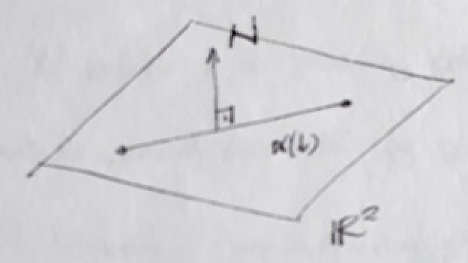
Luego, α es geodésica $\Leftrightarrow$

$$r^2\alpha''(t) + \alpha(t) - \mathbf{p} = \mathbf{0}, \;\; |\alpha'(t)|^2 = 1.$$

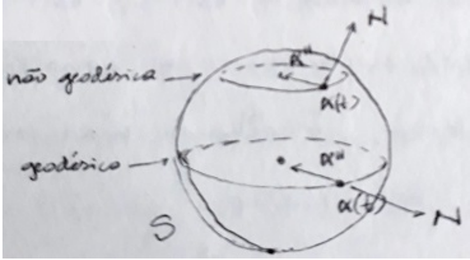
Las soluciones a esta ecuación son

$$\alpha(t) = \mathbf{p} + \mathbf{c}_1 \cos(\tfrac{t}{r}) + \mathbf{c}_2 \sin(\tfrac{t}{r}), \quad \text{con } |\mathbf{c}_1|^2 = r^2,\ |\mathbf{c}_2|^2 = 1,\ \langle \mathbf{c}_1, \mathbf{c}_2 \rangle = 0.$$

Así, las geodésicas en S^2 corresponden a los grandes círculos con rapidez constante (círculos por el ecuador de la esfera).



Geodésicas en un plano.

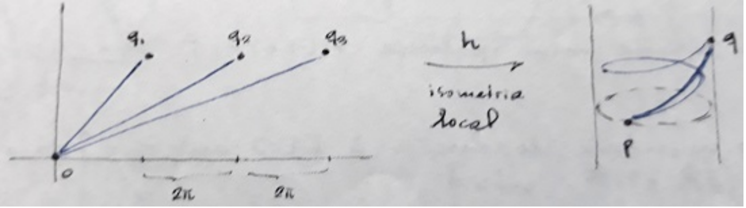


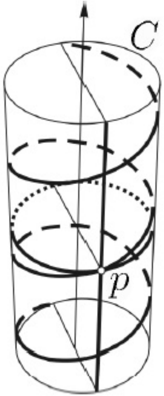
Geodésicas en una esfera.

Ejemplos

Ejemplo 3: (Geodésicas en el cilindro)

Aquí usaremos isometría local entre un cilindro y un plano (ya vimos que las geodésicas son invariantes por isometría).





Bajo la isometría usual, las rectas del plano se convierten en rectas verticales o hélices sobre el cilindro.

Ejemplos

Al transformar las rectas del plano sobre el cilindro, estas se vuelven rectas verticales o hélices. Estas son las dos posibles geodésicas sobre un cilindro.

También es posible mostrar esto de forma analítica: Sea $\alpha(t) = (x(t), y(t), z(t))$ una curva sobre el cilindro (de radio 1), entonces α es geodésica $\Leftrightarrow$

$$(x', y', z') \perp T_{(x,y,z)}S \;\Leftrightarrow\; (x'', y'', z'') = k(x, y, 0),$$

y es posible mostrar que en el caso $\alpha(0) = (1, 0, 0)$ esto conduce a

$$z(t) = bt, \;\; x''(t) + a^2 x(t) = 0, \;\; y''(t) + b^2 y(t) = 0, \;\; a^2 + b^2 = 1.$$

Las soluciones son de la forma

$$\alpha(t) = (\cos at, \sin at, bt), \;\; a^2 + b^2 = 1.$$