

GEOMETRÍA INTRÍNSECA DE SUPERFICIES

ALAN REYES-FIGUEROA
GEOMETRÍA DIFERENCIAL

(AULA 29) 23.ABRIL.2024

Geometría intrínseca de superficies

Sea $S \subset \mathbb{R}^3$ una superficie regular orientada, y sea $\mathbf{x} : U \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow S$ una parametrización. Tenemos asociadas seis aplicaciones $E, F, G, e, f, g : U \rightarrow \mathbb{R}$ correspondientes a los coeficientes de la primera y segunda forma fundamental.

Definición

Diremos que una cantidad asociada a la superficie S es **intrínseca** si es posible escribirla en términos de la primera forma fundamental (como función de los coeficientes E, F, G). Una cantidad es **extrínseca** si depende de la segunda forma fundamental.

- La geometría intrínseca es la geometría que seres bidimensionales puros pueden reconocer, sin ningún conocimiento de la tercera dimensión.

Geometría intrínseca de superficies

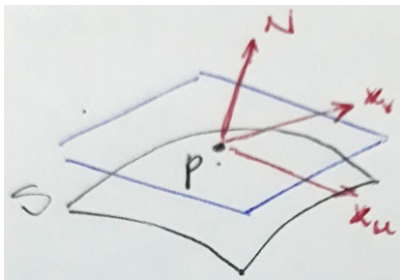
Estamos interesados en responder:

- ¿Qué condiciones sobre las funciones E, F, G, e, f, g garantizan que estas provengan de alguna parametrización de una superficie? En ese caso, ¿la superficie queda únicamente determinada a menos de movimientos rígidos?
- ¿Cuáles cantidades geométricas asociadas a una superficie son intrínsecas? Seguramente ángulos y las longitudes se encuentran entre estas propiedades. La pregunta que surge en particular, si alguna de las las cantidades de curvatura son de este tipo.

Geometría intrínseca de superficies

Recordemos que $g_{ij} = \langle \mathbf{x}_i, \mathbf{x}_j \rangle$, $h_{ij} = \langle \mathbf{N}, \mathbf{x}_{ij} \rangle$, $a_{ij} = \langle \mathbf{N}_i, \mathbf{x}_j \rangle$, con

$$DN = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} h_{11} & h_{12} \\ h_{21} & h_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{21} & g_{22} \end{pmatrix}^{-1}.$$



Sea S superficie regular orientada,
 $\mathbf{x} = \mathbf{x}(u, v)$ su parametrización.
Consideramos el triedro local formado por
 $\mathbf{x}_u, \mathbf{x}_v$ y $\mathbf{N}$ (base local de $\mathbb{R}^3$).

Geometría intrínseca de superficies

Podemos escribir los vectores $\mathbf{x}_{uu}$, $\mathbf{x}_{uv}$, $\mathbf{x}_{vu}$, $\mathbf{x}_{vv}$, N_u , N_v en términos de esta base.

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{x}_{uu} &= \Gamma_{uu}^u \mathbf{x}_u + \Gamma_{uu}^v \mathbf{x}_v + h_{uu} N, \\ \mathbf{x}_{uv} &= \Gamma_{uv}^u \mathbf{x}_u + \Gamma_{uv}^v \mathbf{x}_v + h_{uv} N, \\ \mathbf{x}_{vu} &= \Gamma_{vu}^u \mathbf{x}_u + \Gamma_{vu}^v \mathbf{x}_v + h_{vu} N, \\ \mathbf{x}_{vv} &= \Gamma_{vv}^u \mathbf{x}_u + \Gamma_{vv}^v \mathbf{x}_v + h_{vv} N, \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

$$\left. \begin{aligned} N_u &= a_{11} \mathbf{x}_u + a_{21} \mathbf{x}_v, \\ N_v &= a_{12} \mathbf{x}_u + a_{22} \mathbf{x}_v. \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

donde $\Gamma_{ij}^k \in \mathbb{R}$.

Geometría intrínseca de superficies

Definición

Los coeficientes Γ_{ij}^k se llaman los **símbolos de Christoffel** asociados a $\mathbf{x}$.

En lo que sigue, escribimos $u = 1, v = 2$ y utilizamos la notación compacta de Einstein $a_i^k b_{kj} = \sum_k a_{ik} b_{kj}$.

Entonces, el sistema de ecuaciones (1) se escribe como

$$\begin{aligned}\mathbf{x}_{ij} &= \Gamma_{ij}^k \mathbf{x}_k + h_{ij} N, \\ N_i &= a_i^k \mathbf{x}_k,\end{aligned}$$

para $i, j, k \in \{1, 2\}$

Geometría intrínseca de superficies

Por otro lado, $\mathbf{x}_{ij} = \mathbf{x}_{ji} \Rightarrow \Gamma_{ij}^k = \Gamma_{ji}^k$, de modo que los símbolos de Christoffel son simétricos en relación a los índices inferiores.

Recordemos que la primera forma fundamental se representa por $G = (g_{ij})$, con $g_{ij} = \langle \mathbf{x}_i, \mathbf{x}_j \rangle$. Denotamos la inversa por $G^{-1} = (g^{ij})$. Tenemos

$$g_{ik}g^{kj} = \delta_i^j \text{ (delta de Kronecker).}$$

De ahí que

$$\langle \mathbf{x}_{ij}, \mathbf{x}_\ell \rangle = \langle \Gamma_{ij}^k \mathbf{x}_k + h_{ij} \mathbf{N}, \mathbf{x}_\ell \rangle = \Gamma_{ij}^k \langle \mathbf{x}_k, \mathbf{x}_\ell \rangle + h_{ij} \langle \mathbf{N}, \mathbf{x}_\ell \rangle = \Gamma_{ij}^k g_{k\ell} = g_{k\ell} \Gamma_{ij}^k.$$

$$\Rightarrow g^{\ell p} \langle \mathbf{x}_{ij}, \mathbf{x}_\ell \rangle = g^{\ell p} g_{k\ell} \Gamma_{ij}^k = \delta_k^p \Gamma_{ij}^k = \Gamma_{ij}^p.$$

Geometría intrínseca de superficies

Portanto

$$\Gamma_{ij}^k = g^{\ell k} \langle \mathbf{x}_{ij}, \mathbf{x}_\ell \rangle. \quad (3)$$

Además,

$$\begin{aligned} \partial_k g_{ij} &= \partial_k \langle \mathbf{x}_i, \mathbf{x}_j \rangle = \langle \mathbf{x}_{ik}, \mathbf{x}_j \rangle + \langle \mathbf{x}_i, \mathbf{x}_{jk} \rangle, \\ -\partial_j g_{ik} &= -\partial_j \langle \mathbf{x}_i, \mathbf{x}_k \rangle = -\langle \mathbf{x}_{ij}, \mathbf{x}_k \rangle - \langle \mathbf{x}_i, \mathbf{x}_{jk} \rangle, \\ \partial_i g_{jk} &= \partial_i \langle \mathbf{x}_j, \mathbf{x}_k \rangle = \langle \mathbf{x}_{ij}, \mathbf{x}_k \rangle + \langle \mathbf{x}_j, \mathbf{x}_{ik} \rangle. \end{aligned}$$

Sumando estas tres ecuaciones, obtenemos

$$\partial_k g_{ij} - \partial_j g_{ik} + \partial_i g_{jk} = \langle \mathbf{x}_{ik}, \mathbf{x}_j \rangle + \langle \mathbf{x}_j, \mathbf{x}_{ik} \rangle = 2 \langle \mathbf{x}_{ik}, \mathbf{x}_j \rangle. \quad (4)$$

Sustituyendo (4) en (3), obtenemos

$$\Gamma_{ij}^k = \frac{1}{2} g^{\ell k} (\partial_i g_{j\ell} + \partial_j g_{i\ell} - \partial_\ell g_{ij}).$$

Geometría intrínseca de superficies

Hemos probado entonces que

Propiedad

Los símbolos de Christoffel Γ_{ij}^k son cantidades intrínsecas. $\square$

Corolario

Los símbolos de Christoffel Γ_{ij}^k son invariantes por isometrías. $\square$

Ecuaciones de compatibilidad

Dadas funciones $E, F, G, e, f, g : U \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, ¿existe alguna parametrización $\mathbf{x}$ de una superficie tal que E, F, G, e, f, g sean los coeficientes de la primera y segunda forma fundamental asociada a $\mathbf{x}$?

Obs! Requerimos algunas condiciones necesarias

- $E > 0, G > 0,$
- $EG - F^2 > 0.$

Podemos derivar otras condiciones de compatibilidad. Recordemos que

$$\begin{aligned}\mathbf{x}_{ij} &= \Gamma_{ij}^k \mathbf{x}_k + h_{ij} \mathbf{N}, \\ N_i &= a_i^k \mathbf{x}_k, \\ \Gamma_{ij}^k &= \frac{1}{2} g^{\ell k} (\partial_i g_{j\ell} + \partial_j g_{i\ell} - \partial_\ell g_{ij}).\end{aligned}$$

Ecuaciones de compatibilidad

Derivando parcialmente la primer ecuación

$$(\Gamma_{ij}^k \mathbf{x}_k + h_{ij} N)_m = (\mathbf{x}_{ij})_m = \mathbf{x}_{ijm} = \mathbf{x}_{imj} = (\mathbf{x}_{im})_j = (\Gamma_{im}^k \mathbf{x}_k + h_{im} N)_j.$$

Denotamos por $\Gamma_{ij,m}^k = \partial_m \Gamma_{ij}^k$. Entonces

$$\Gamma_{ij,m}^k \mathbf{x}_k + \Gamma_{ij}^k \mathbf{x}_{km} + h_{ij,m} N + h_{ij} N_m = \Gamma_{im,j}^k \mathbf{x}_k + \Gamma_{im}^k \mathbf{x}_{kj} + h_{im,j} N + h_{im} N_j.$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow & \Gamma_{ij,m}^k \mathbf{x}_k + \Gamma_{ij}^k (\Gamma_{km}^\ell \mathbf{x}_\ell + h_{km} N) + h_{ij,m} N + h_{ij} a_m^\ell \mathbf{x}_\ell \\ &= \Gamma_{im,j}^k \mathbf{x}_k + \Gamma_{im}^k (\Gamma_{kj}^\ell \mathbf{x}_\ell + h_{kj} N) + h_{im,j} N + h_{im} a_j^\ell \mathbf{x}_\ell. \end{aligned}$$

Reescribiendo $\Gamma_{ij,m}^k = \Gamma_{ij,m}^\ell$, $\Gamma_{im,j}^k = \Gamma_{im,j}^\ell$

$$\begin{aligned} & (\Gamma_{ij,m}^\ell + \Gamma_{ij}^k \Gamma_{km}^\ell + h_{km} a_m^\ell) \mathbf{x}_\ell + (h_{ij,m} + h_{km} \Gamma_{ij}^k) N \\ &= (\Gamma_{im,j}^\ell + \Gamma_{im}^k \Gamma_{kj}^\ell + h_{kj} a_j^\ell) \mathbf{x}_\ell + (h_{im,j} + h_{kj} \Gamma_{im}^k) N. \end{aligned}$$

Ecuaciones de compatibilidad

Como $\mathbf{x}_\ell$ y N son independientes, podemos deducir las primeras ecuaciones de compatibilidad.

$$1. \Gamma_{ij,m}^\ell + \Gamma_{ij}^k \Gamma_{km}^\ell + h_{km} a_m^\ell = \Gamma_{im,j}^\ell + \Gamma_{im}^k \Gamma_{kj}^\ell + h_{kj} a_j^\ell,$$

$$2. h_{ij,m} N + h_{km} \Gamma_{ij}^k = h_{im,j} N + h_{kj} \Gamma_{im}^k.$$

Hacemos un tratamiento similar con la segunda ecuación

$$(a^k_i \mathbf{x}_k)_j = (N_i)_j = N_{ij} = N_{ji} = (N_j)_i = (a^k_j \mathbf{x}_k)_i$$

$$\Rightarrow a^k_{i,j} \mathbf{x}_k + a^k_i \mathbf{x}_{kj} = N_{ij} = N_{ji} = a^k_{j,i} \mathbf{x}_k + a^k_j \mathbf{x}_{ki}$$

o equivalentemente

$$a^k_{i,j} \mathbf{x}_k + a^k_i (\Gamma_{kj}^\ell \mathbf{x}_\ell + h_{kj} N) = a^k_{j,i} \mathbf{x}_k + a^k_j (\Gamma_{ki}^\ell \mathbf{x}_\ell + h_{ki} N).$$

Ecuaciones de compatibilidad

Reescribiendo $\Gamma_{ij,m}^k = \Gamma_{ij,m}^\ell$, $\Gamma_{im,j}^k = \Gamma_{im,j}^\ell$

$$(a_{i,j}^\ell + a_i^k \Gamma_{kj}^\ell) \mathbf{x}_\ell + a_i^k h_{kj} N = (a_{j,i}^k + a_j^k \Gamma_{ki}^\ell) \mathbf{x}_\ell + a_j^k h_{ki} N.$$

De nuevo, como $\mathbf{x}_\ell$ y N son independientes, obtenemos otras dos ecuaciones de compatibilidad.

$$3. a_{i,j}^\ell + a_i^k \Gamma_{kj}^\ell = a_{j,i}^k + a_j^k \Gamma_{ki}^\ell,$$

$$4. a_i^k h_{kj} = a_j^k h_{ki}.$$

Por otro lado, de la condición de compatibilidad (1.) tenemos

$$h_{ij} a_m^\ell - h_{im} a_j^\ell = \Gamma_{im,j}^\ell - \Gamma_{ij,m}^\ell + \Gamma_{im}^k \Gamma_{kj}^\ell - \Gamma_{ij}^k \Gamma_{km}^\ell. \quad (5)$$

Teorema (Teorema *Egregium* de Gauss)

La curvatura gaussiana K es una cantidad intrínseca.

Prueba:

$$\begin{aligned}-EK &= -E \frac{eg - f^2}{EG - F^2} = e \frac{fF - gE}{EG - F^2} - f \frac{eF - fE}{EG - F^2} \\ &= h_{11}a_{22} - h_{12}a_{21} \\ &= \Gamma_{12,1}^2 - \Gamma_{11,2}^2 + \Gamma_{12}^k \Gamma_{k1}^2 - \Gamma_{11}^k \Gamma_{k2}^1,\end{aligned}$$

donde la última igualdad es la eq. (5) con $i = j = 1$, $\ell = m = 2$.

De ahí que

$$K = -\frac{1}{g_{11}} \left(\Gamma_{12,1}^2 - \Gamma_{11,2}^2 + \Gamma_{12}^k \Gamma_{k1}^2 - \Gamma_{11}^k \Gamma_{k2}^1 \right). \quad \square$$