Orientabilidad de Superficies II

Alan Reyes-Figueroa

Geometría Diferencial (Aula 18) 14.marzo.2024

Teorema

Sea $S \subseteq \mathbb{R}^3$ superficie regular. Entonces, S es orientable $\iff$ existe una aplicación continua $N : S \to \mathbb{R}^3$ tal que $N(\mathbf{p}) \in T_{\mathbf{p}}S^{\perp}$ y $||N(\mathbf{p})|| = 1$, $\forall \mathbf{p} \in S$ (esto es, S admite un campo normal unitario continuo N).

Prueba:

[$\Rightarrow$]. Suponga que S es orientable. Entonces existe un atlas coherente $\mathcal{A} = \{(\mathbf{x}_i, U_i)\}_{i \in I}$ con $\mathbf{x}_i : U_i \subseteq \mathbb{R}^2 \to V_i \cap S$, parametrizaciones coherentes. Además, $S = \bigcup_i V_i = \bigcup_i \mathbf{x}_i(U_i)$. Dado $\mathbf{p} \in S$, existe $j \in I$ tal que $\mathbf{p} \in V_j$. Definimos entonces

$$N(\mathbf{p}) = \frac{\mathbf{x}_{ju}(\mathbf{q}) \times \mathbf{x}_{jv}(\mathbf{q})}{||\mathbf{x}_{ju}(\mathbf{q}) \times \mathbf{x}_{jv}(\mathbf{q})||}, \quad \text{donde } \mathbf{q} = \mathbf{x}_j^{-1}(\mathbf{p}) \in U_j.$$

Superficies orientables

Si existe algún otro índice $k \in I$ tal que $\mathbf{p} \in V_k = \mathbf{x}_k(U_k)$, entonces como $\mathbf{x}_j$ y $\mathbf{x}_k$ son coherentes, se tiene que $\{\mathbf{x}_{ju}, \mathbf{x}_{jv}\}$ y $\{\mathbf{x}_{ku}, \mathbf{x}_{kv}\}$ son bases de $T_\mathbf{p}S$, ambas con la misma orientación (¿por qué?).

Luego, $\mathbf{x}_{ku} \times \mathbf{x}_{kv} = \lambda(\mathbf{x}_{ju} \times \mathbf{x}_{jv})$, con $\lambda > 0$, y se tiene que

$$\frac{\mathbf{x}_{ku}(\mathbf{q}) \times \mathbf{x}_{kv}(\mathbf{q})}{||\mathbf{x}_{ku}(\mathbf{q}) \times \mathbf{x}_{kv}(\mathbf{q})||} = \frac{\lambda(\mathbf{x}_{ju}(\mathbf{q}) \times \mathbf{x}_{jv}(\mathbf{q}))}{||\lambda(\mathbf{x}_{ju}(\mathbf{q}) \times \mathbf{x}_{jv}(\mathbf{q}))||} = \frac{\mathbf{x}_{ju}(\mathbf{q}) \times \mathbf{x}_{jv}(\mathbf{q})}{||\mathbf{x}_{ju}(\mathbf{q}) \times \mathbf{x}_{jv}(\mathbf{q})||}.$$

de modo que el vector normal $N(\mathbf{p})$ está bien definido e independe de la carta local $\mathbf{x}_i$ en el atlas coherente.

Además, $N(\mathbf{p})$ es una función continua, pues en cartas locales, depende de cocientes y productos cruz de funciones diferenciables.

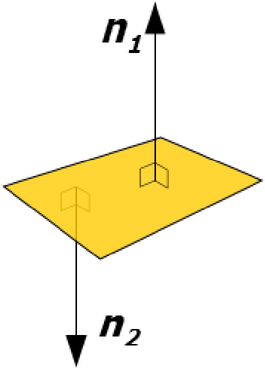
[$\Leftarrow$]. Suponga ahora que existe un campo normal unitario continuo $N : S \to \mathbb{R}^3$. Sea $\mathbf{x} : U \subseteq \mathbb{R}^2 \to V \cap S$, con U conexo.

Definamos la función $f : U \to \mathbb{R}$ por

$$f(\mathbf{q}) = \left\langle N(\mathbf{x}(\mathbf{q})), \frac{\mathbf{x}_u(\mathbf{q}) \times \mathbf{x}_v(\mathbf{q})}{||\mathbf{x}_u(\mathbf{q}) \times \mathbf{x}_v(\mathbf{q})||} \right\rangle.$$

Entonces, $N(\mathbf{x}(\mathbf{q})) = f(\mathbf{q}) \cdot \dfrac{\mathbf{x}_u \times \mathbf{x}_v}{||\mathbf{x}_u \times \mathbf{x}_v||}(\mathbf{q})$, con $f(\mathbf{q}) = 1$ ó $f(\mathbf{q}) = -1$.

Como f es continua en U y U es conexo, entonces $f \equiv 1$ ó $f \equiv -1$ en U.



Superficies orientables

Si $f \equiv -1$, redefinimos la parametrización $\mathbf{x}$ por $\widetilde{\mathbf{x}}(u, v) = \mathbf{x}(v, u)$ (esto es, $\widetilde{\mathbf{x}} = \mathbf{x} \circ r$, donde r es la reflexión $(u, v) \to (v, u)$), en el conjunto $\widetilde{U} = \{(v, u) : (u, v) \in U\}$.
Observe que $\widetilde{\mathbf{x}}(\widetilde{U}) = \mathbf{x}(U) = V \cap S$ y $f(\widetilde{U}) \equiv 1$.

Sea $\mathcal{A}$ la colección

$$\mathcal{A} = \{(\mathbf{x}, U) : \ U \subseteq \mathbb{R}^2 \text{ conexo}, \mathbf{x} : U \to V \cap S, \ \text{y } N(\mathbf{x}(\mathbf{q})) = \frac{\mathbf{x}_u \times \mathbf{x}_v}{||\mathbf{x}_u \times \mathbf{x}_v||}(\mathbf{q}), \ \forall \mathbf{q} \in U\}.$$

Para cualquier parametrización con dominio conexo U, se tiene que $(\mathbf{x}, u) \in \mathcal{A}$ ó $(\widetilde{\mathbf{x}}, \widetilde{U}) \in \mathcal{A}$.
Luego, como S es superficie, podemos cubrir S con cartas locales $(\mathbf{x}, U)$, donde, de ser necesario, restringimos los dominios U a abiertos conexos. En particular, $S = \bigcup_{\mathbf{x} \in \mathcal{A}} \mathbf{x}(U)$.

Sean $(\mathbf{x}_i, U_i), (\mathbf{x}_j, U_j) \in \mathcal{A}$. Mostramos que $\mathbf{x}_i$ y $\mathbf{x}_j$ son coherentes.

Si $\mathbf{x}_i(U_i) \cap \mathbf{x}_j(U_j) = \varnothing$, no hay nada que mostrar. Caso contrario, tome $\mathbf{p} \in \mathbf{x}_i(U_i) \cap \mathbf{x}_j(U_j)$, con $\mathbf{x}_i(\mathbf{q}_i) = \mathbf{p} = \mathbf{x}_j(\mathbf{q}_j)$. Como,

$$\frac{\mathbf{x}_{iu}(\mathbf{q}_i) \times \mathbf{x}_{iv}(\mathbf{q}_i)}{||\mathbf{x}_{iu}(\mathbf{q}_i) \times \mathbf{x}_{iv}(\mathbf{q}_i)||} = N(\mathbf{x}_i(\mathbf{q}_i)) = N(\mathbf{x}_j(\mathbf{q}_j)) = \frac{\mathbf{x}_{ju}(\mathbf{q}_j) \times \mathbf{x}_{jv}(\mathbf{q}_j)}{||\mathbf{x}_{ju}(\mathbf{q}_j) \times \mathbf{x}_{jv}(\mathbf{q}_j)||}.$$

Esto muestra que $\mathbf{x}_{iu} \times \mathbf{x}_{iv}$ y $\mathbf{x}_{ju} \times \mathbf{x}_{jv}$ tienen igual signo, de modo que las bases $\{\mathbf{x}_{iu}, \mathbf{x}_{iv}\}$ y $\{\mathbf{x}_{ju}, \mathbf{x}_{jv}\}$ tienen igual orientación $\Rightarrow$ las cartas $(\mathbf{x}_i, U_i)$, $(\mathbf{x}_j, U_j)$ son coherentes.

Esto muestra que $\mathcal{A}$ es un atlas coherente para $S \Rightarrow S$ es orientable. $\square$

Corolario

Si la superficie $S \subseteq \mathbb{R}^3$ es la imagen inversa de un valor regular de una función diferenciable $f : U \subseteq \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, entonces S es orientable.

Prueba:
Sea $S = f^{-1}(a)$, a valor regular de f. Para $\mathbf{p} \in S$, consideremos $\mathbf{x}(u,v) = \big(x(u,v), y(u,v), z(u,v)\big)$ una parametrización de una vecindad $V \cap S$ de $\mathbf{p}$.

Tomemos una curva parametrizada dada por $\alpha : (-\varepsilon, \varepsilon) \to V \cap S$, tal que $\alpha(t) = (x(t), y(t), z(t))$, con $\alpha(0) = \mathbf{p}$. Entonces

$$f(\alpha(t)) = f\big(x(t), y(t), z(t)\big) = a, \quad \text{para todo } t \in (-\varepsilon, \varepsilon).$$

Superficies orientables

Derivando la ecuación anterior en $t = 0$, obtenemos

$$D(f \circ \alpha)(0) = \nabla f(\mathbf{p}) \cdot \alpha'(0) = \frac{\partial f}{\partial x}(\mathbf{p})x'(0) + \frac{\partial f}{\partial y}(\mathbf{p})y'(0) + \frac{\partial f}{\partial z}(\mathbf{p})z'(0) = 0.$$

Luego, $\nabla f(\mathbf{p}) \cdot \alpha'(0) = 0$. Como esto vale para toda curva parametrizada α en S pasando por $\mathbf{p}$, entonces $\nabla f(\mathbf{p})$ es normal a $T_{\mathbf{p}}S$. Como esto vale en todo punto $\mathbf{p} \in S$, entonces

$$N(\mathbf{p}) = \frac{\nabla f(\mathbf{p})}{||\nabla f(\mathbf{p})||}$$

define un campo normal unitario continuo para S.
Por el teorema anterior, S es orientable. $\square$

Ejemplos

Ejemplo 1: (Abiertos de $\mathbb{R}^2$)
Todo abierto $U \subseteq \mathbb{R}^2$ es orientable. Para ello, basta considerar el atlas $\mathcal{A} = \{(id, U)\}$, el cual es coherente ya que consiste de una sola carta local.

Ejemplo 2: (Grafos de funciones)
Todo gráfico de una función diferenciable $G_f = \{(u, v, f(u, v)) : (u, v) \in U \subseteq \mathbb{R}^2\}$ es una superficie orientable.
Podemos parametrizar G_f por $\mathbf{x}(u, v) = (u, v, f(u, v))$, y considerar el atlas coherente $\mathcal{A} = \{(\mathbf{x}, U)\}$.

Ejemplos

Ejemplo 3: (La esfera S^2)
La esfera unitaria S^2 es orientable. Considere el campo normal $N : S^2 \to \mathbb{R}^3$ dado por

$$N(\mathbf{p}) = \mathbf{p}, \quad \forall \mathbf{p} \in S^2.$$

Este es un campo normal unitario diferenciable.

Ejemplo 4: (Preimagen de un valor regular)
Sea $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ función diferenciable, a valor regular de f, y $S = f^{-1}(a)$. Entonces S es orientable. Basta ver que

$$N(\mathbf{p}) = \frac{\nabla f(\mathbf{p})}{||\nabla f(\mathbf{p})||}$$

define un campo normal unitario continuo sobre S.

Propiedad

Sea $S \subseteq \mathbb{R}^3$ superficie regular. Suponga que $S = \mathbf{x}_1(U_1) \cup \mathbf{x}_2(U_2)$, con $\mathbf{x}_1 : U_1 \to V_1$, $\mathbf{x}_2 : U_2 \to V_2$ parametrizaciones. En otras palabras, $\mathcal{A} = \{(\mathbf{x}_1, U_1), (\mathbf{x}_2, U_2)\}$ es un atlas para S.
Si $W = V_1 \cap V_2 = \mathbf{x}_1(U_1) \cap \mathbf{x}_2(U_2)$ es conexo, entonces S es orientable.

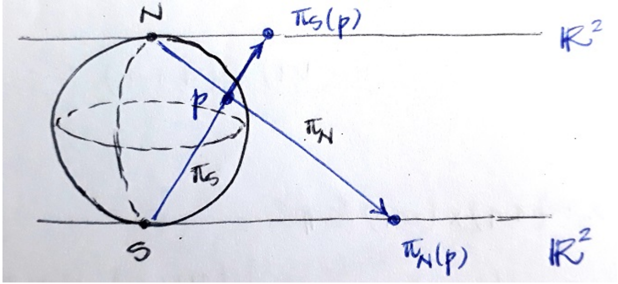
Prueba:
Como sólo hay dos cartas locales, con intersección conexa W, entonces hay dos posibilidades para todo punto $\mathbf{q} \in \mathbf{x}_{-1}(W)$:

$$\det D(\mathbf{x}_2^{-1} \circ \mathbf{x}_1)(\mathbf{q}) > 0, \quad \text{ó} \quad \det D(\mathbf{x}_2^{-1} \circ \mathbf{x}_1)(\mathbf{q}) < 0.$$

Si $\det > 0$, las cartas son coherentes. Caso contrario, podemos hacer la mudanza de parámetros $r : (u, v) \to (v.u)$, y redefinir la parametrización $\widetilde{\mathbf{x}}_1 = \mathbf{x}_1 \circ r$. Luego, $\det D(\mathbf{x}_2^{-1} \circ \widetilde{\mathbf{x}}_1)(\mathbf{q}) > 0$. $\square$

Ejemplo 5: (La esfera S^2)

Consideramos la proyección estereográfica



Tenemos dos cartas locales para S^2: $(\pi_N^{-1}, \mathbb{R}^2)$ y $(\pi_S^{-1}, \mathbb{R}^2)$, con

- $S^2 = \pi_N^{-1}(\mathbb{R}^2) \cup \pi_S^{-1}(\mathbb{R}^2)$
- $W = \pi_N^{-1}(\mathbb{R}^2) \cap \pi_S^{-1}(\mathbb{R}^2) = S^2 - \{N, S\} \simeq S^1 \times (0, 1)$ es conexo.

Por la propiedad anterior, S^2 es orientable.

Proposición

$S \subseteq \mathbb{R}^3$ es no orientable $\iff$ existen dos vecindades conexas parametrizadas $U_1, U_2 \subseteq \mathbb{R}^2$, con $\mathbf{x}_1 : U_1 \to V_1, \mathbf{x}_2 : U_2 \to V_2$ tales que la intersección $W = V_1 \cap V_2 \cap S$ tiene dos componentes conexas W_1 y W_2, con

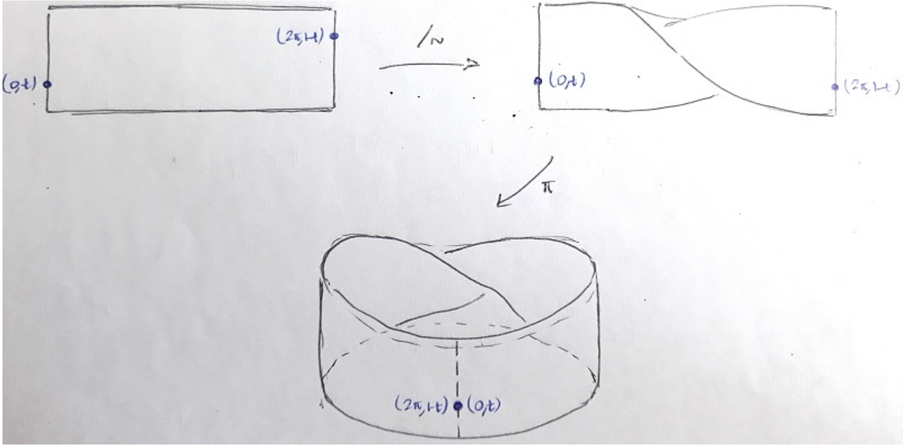
$$\det D(\mathbf{x}_2^{-1} \circ \mathbf{x}_1) > 0 \text{ en } W_1, \quad y \quad \det D(\mathbf{x}_2^{-1} \circ \mathbf{x}_1) < 0 \text{ en } W_2.$$

Idea de prueba:

Las cartas $(\mathbf{x}_1, U_1)$ y $(\mathbf{x}_2, U_2)$ no son coherentes (sí lo son sobre W_1 ó W_2 por separado, pero no sobre toda la intersección W).

Cualquier intento de corregir la coherencia en W_2 (*e.g.* considerar la reflexión $(u, v) \to (v, u)$) automáticamente desarma la coherencia sobre W_1.

Ejemplo 6: La banda de Möbius no es orientable.

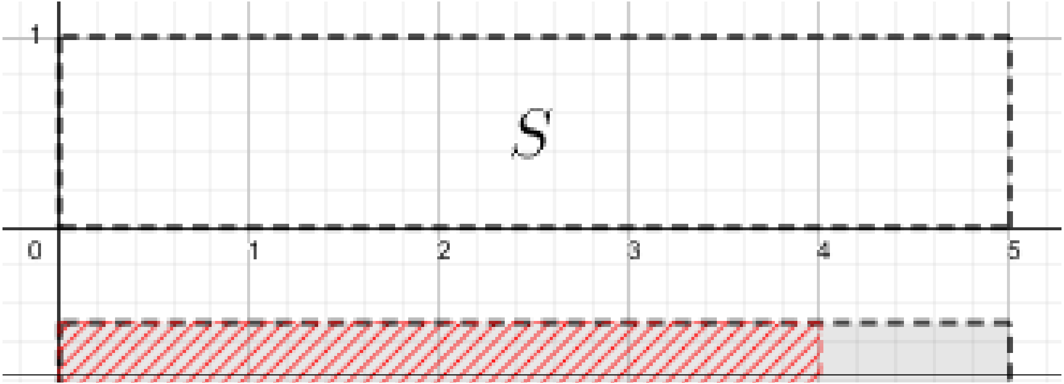


Un modelo para la banda de Möbius.

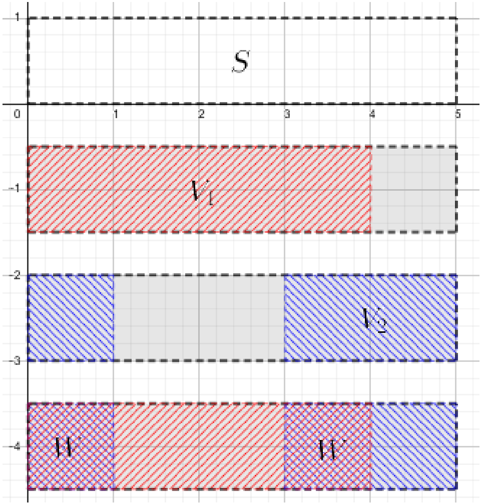
Ejemplos

Usamos el modelo

$$S = \text{Möbius} \; = [0,5] \times (0,1)/\sim, \quad \text{donde } (0,y) \sim (5, 1-y).$$



Ejemplos



Ejemplos

Consideramos las cartas locales $\mathbf{x}_1 : U_1 \to V_1$, $\mathbf{x}_2 : U_2 \to V_2$, donde $U_1 = V_1 = (0,4) \times (0,1)$, $U_2 = (0,3) \times (0,1)$, $V_2 = ([0,1) \cup (3,5]) \times (0,1)$ y

$$\mathbf{x}_1(u,v) = (u,v), \quad \mathbf{x}_2(u,v) = \begin{cases} (u+3,v), & \text{si } 0 < u \leq 2; \\ (u-2, 1-v), & \text{si } 2 \leq u < 3. \end{cases}$$

La intersección $W = V_1 \cap V_2$ tiene dos componentes conexas: $W_1 = (3,4) \times (0,1)$ y $W_2 = (0,1) \times (0,1)$.

Basta ver que

$$D(\mathbf{x}_2^{-1} \circ \mathbf{x}_1)(\mathbf{p}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ en } W_1, \quad D(\mathbf{x}_2^{-1} \circ \mathbf{x}_1)(\mathbf{p}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \text{ en } W_2.$$