

# **SUPERFICIES REGULARES**

ALAN REYES-FIGUEROA  
GEOMETRÍA DIFERENCIAL

(AULA 13) 22.FEBRERO.2024

## 4. Gráficas de funciones

Sea  $f : U \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  una función diferenciable. Consideramos la parametrización  $\mathbf{x} : U \rightarrow \mathbb{R}^3$  dada por

$$\mathbf{x}(u, v) = (u, v, f(u, v)).$$

Claramente,  $\mathbf{x}$  es diferenciable ya que  $f$  es diferenciable. La imagen de  $\mathbf{x}$  es el grafo

$$G_f = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : (x, y) \in U, z = f(x, y)\}.$$

Observe que  $\mathbf{x}$  es una función biyectiva, y con inversa  $\mathbf{x}^{-1}(x, y, z) = (x, y)$  igual a la restricción de la proyección  $\pi_{12}(x, y, z) = (x, y)$  al abierto  $U$ , de modo que  $\mathbf{x}^{-1}$  también es continua, y portanto un homeomorfismo.

# Superficies

Además, la derivada de  $\mathbf{x}$  está dada por

$$D\mathbf{x}(u, v) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ \frac{\partial f}{\partial u}(u, v) & \frac{\partial f}{\partial v}(u, v) \end{pmatrix}.$$

Esta es inyectiva, ya que el menor  $\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} = 1$ .

Esto muestra que toda gráfica de una función diferenciable, en un dominio abierto  $U \subseteq \mathbb{R}^2$  es una superficie regular.

**Obs!** Gráficas de funciones del tipo  $(x, g(x, z), z)$  ó  $(h(y, z), y, z)$  también son superficies regulares.

La recíproca del ejemplo anterior también vale cuando es analizada desde el punto de vista local.

Necesitamos el siguiente resultado de análisis:

## Teorema (Teorema de la Función Inversa)

Sea  $F : U \subseteq \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$  una aplicación diferenciable. Si la derivada  $DF(\mathbf{p}) : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$  es un isomorfismo lineal (esto es,  $\det DF(\mathbf{p}) \neq 0$ ) para  $\mathbf{p} \in U$ , entonces existen vecindades  $V \subseteq U$  de  $\mathbf{p}$  y  $W \subseteq \mathbb{R}^m$  de  $\mathbf{q} = F(\mathbf{p})$ , tales que la restricción

$$F|_V : V \rightarrow F(V) = W$$

es un difeomorfismo (i.e.  $F|_V$  y  $F^{-1}|_W$  son ambas diferenciables).

## Proposición (Superficies regulares son localmente gráficas)

Sea  $S \subseteq \mathbb{R}^3$  una superficie regular. Para todo punto  $\mathbf{p} \in S$ , existe una vecindad  $V \subseteq \mathbb{R}^3$  de  $\mathbf{p}$  tal que  $V \cap S$  es la gráfica de alguna función diferenciable, sobre alguno de los planos coordenados  $xy$ ,  $xz$  ó  $yz$ .

Prueba:

Dado  $\mathbf{p} \in S$ , como  $S$  es superficie regular, existe una vecindad  $V \subseteq \mathbb{R}^3$  de  $\mathbf{p}$  y una parametrización local  $\mathbf{x} : U \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow V \cap S$ .

Sea  $\mathbf{q} \in U$  tal que  $\mathbf{x}(\mathbf{q}) = \mathbf{p}$  y consideremos el mapa

$$\mathbf{x}(u, v) = (x(u, v), y(u, v), z(u, v)).$$

# Superficies

Sabemos que la matriz jacobiana de  $\mathbf{x}$

$$D\mathbf{x}(\mathbf{q}) = \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial u}(\mathbf{q}) & \frac{\partial x}{\partial v}(\mathbf{q}) \\ \frac{\partial y}{\partial u}(\mathbf{q}) & \frac{\partial y}{\partial v}(\mathbf{q}) \\ \frac{\partial z}{\partial u}(\mathbf{q}) & \frac{\partial z}{\partial v}(\mathbf{q}) \end{pmatrix}$$

es inyectiva y de rango 2. Así, al menos uno de los determinantes menores

$$\frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)}, \quad \frac{\partial(x, z)}{\partial(u, v)}, \quad \frac{\partial(y, z)}{\partial(u, v)}$$

no se anula en el punto  $\mathbf{q}$ .

Sin pérdida de generalidad, podemos asumir que  $\frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)}(\mathbf{q}) \neq 0$ .

# Superficies

Si  $\pi : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$  es la proyección  $\pi(x, y, z) = (x, y)$ , entonces la composición  $\pi \circ \mathbf{x} : U \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \pi(V \cap S) \subseteq \mathbb{R}^2$  es diferenciable (pues es composición de mapas diferenciables), y su derivada es

$$D(\pi \circ \mathbf{x})(\mathbf{q}) = D\pi(\mathbf{p}) D\mathbf{x}(\mathbf{q}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial u}(\mathbf{q}) & \frac{\partial x}{\partial v}(\mathbf{q}) \\ \frac{\partial y}{\partial u}(\mathbf{q}) & \frac{\partial y}{\partial v}(\mathbf{q}) \\ \frac{\partial z}{\partial u}(\mathbf{q}) & \frac{\partial z}{\partial v}(\mathbf{q}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial u}(\mathbf{q}) & \frac{\partial x}{\partial v}(\mathbf{q}) \\ \frac{\partial y}{\partial u}(\mathbf{q}) & \frac{\partial y}{\partial v}(\mathbf{q}) \end{pmatrix}.$$

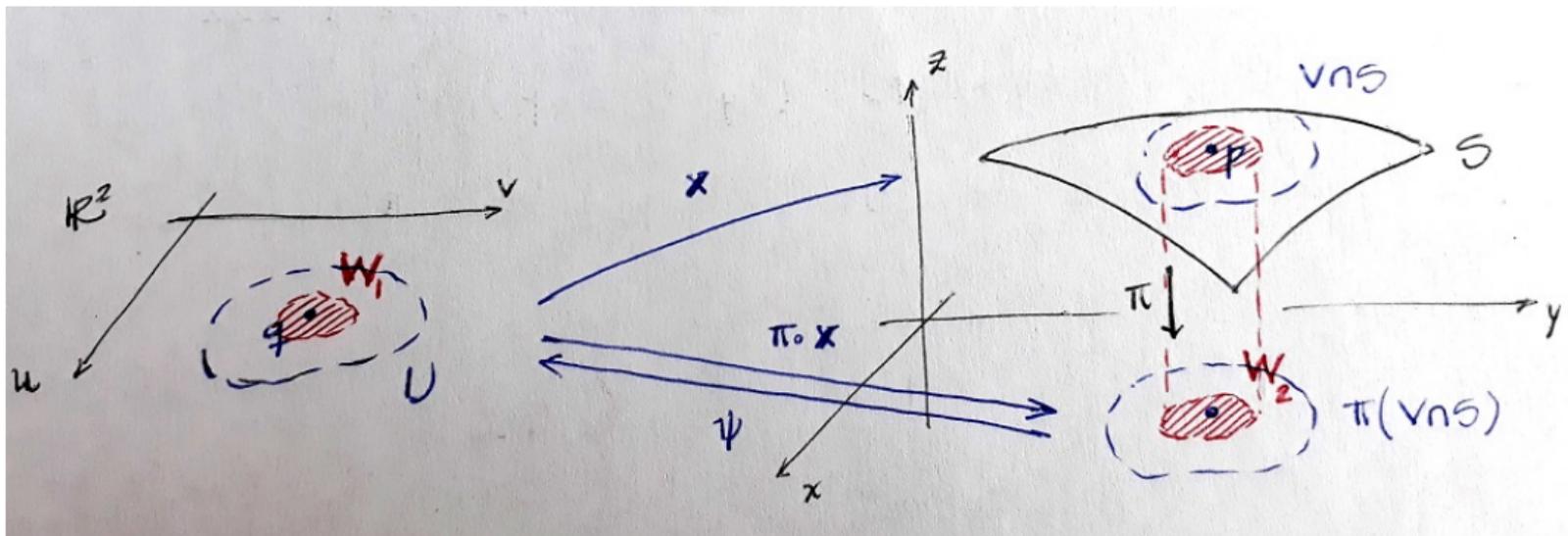
En particular,  $\det D(\pi \circ \mathbf{x})(\mathbf{q}) \neq 0$ , de modo que  $D(\pi \circ \mathbf{x})(\mathbf{q})$  es un isomorfismo lineal.

Por el Teorema de la Función Inversa, existen vecindades  $W_1 \subseteq U$  de  $\mathbf{q}$  y  $W_2 \subseteq \pi(V \cap S)$  de  $\mathbf{p}$  tales que

$$(\pi \circ \mathbf{x})|_{W_1} : W_1 \rightarrow W_2 \text{ es un difeomorfismo.}$$

# Superficies

En particular,  $(\pi \circ \mathbf{x})(u, v) = (x(u, v), y(u, v))$ , y la función inversa es  $\psi = (\pi \circ \mathbf{x})|_{W_2}^{-1} : W_2 \rightarrow W_1$  es diferenciable.



Definamos la función  $f : W_2 \rightarrow \mathbb{R}$  por  $f(x, y) = z(\psi(x, y))$ .

$f$  es diferenciable, por ser composición de mapas diferenciables. Además,

$$\mathbf{x}(W_1) = \{(x(u, v), y(u, v), z(u, v)) \in \mathbb{R}^3 : (u, v) \in W_1\}.$$

Por otro lado,

$$\begin{aligned} G_f &= \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z = f(x, y), (x, y) = (\pi \circ \mathbf{x})(u, v) \in W_2, (u, v) \in W_1\} \\ &= \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x = x(u, v), y = y(u, v), z = z(\psi(x, y)) = z(u, v), (u, v) \in W_1\} \\ &= \{(x(u, v), y(u, v), z(u, v)) \in \mathbb{R}^3 : (u, v) \in W_1\} \\ &= \mathbf{x}(W_1). \end{aligned}$$

Portanto,  $V \cap S \supseteq W_2 = \mathbf{x}(W_1)$  es el grafo de la función  $f$ .

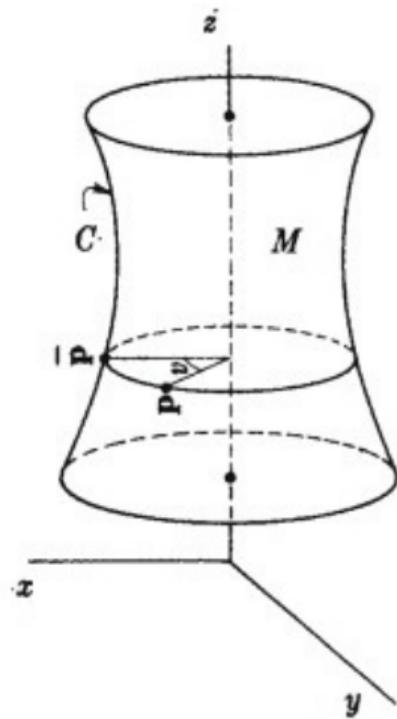
# Superficies de revolución

## 5. Superficies de revolución:

Sea  $C : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$  una curva regular plana inyectiva, y sea  $L$  un eje en el plano que no corta a la curva  $C$ , (e.g.  $xz$  el plano de  $C$  y  $Oz$  el eje).

Sea  $S$  el subconjunto de  $\mathbb{R}^3$  obtenido al girar la curva  $C$  en torno del eje  $Oz$ .

Sea  $x = f(v)$ ,  $z = g(v)$ , con  $a \leq v \leq b$  una parametrización de la curva  $C$ , con  $f(v) > 0$ ; y denotemos por  $u$  el ángulo de rotación en torno del eje  $Oz$ .



# Superficies de revolución

La aplicación

$$\mathbf{x}(u, v) = (f(v) \cos u, f(v) \sin u, g(v)),$$

definida en el abierto  $U = (0, 2\pi) \times (a, b) \subset \mathbb{R}^2$  proporciona una parametrización para  $S$ :

- $\mathbf{x}$  es diferenciable (desde que  $f$  y  $g$  son diferenciables).
- Como  $(f(v), g(v))$  parametriza  $C$ , dados  $z$  y  $r^2 = x^2 + y^2 = (f(v))^2$  entonces  $z = g(v)$  y  $r = f(v)$ , están únicamente determinados,  $\Rightarrow, x = r \cos u, y = r \sin u$  también  $\Rightarrow \mathbf{x}$  es inyectiva y continua.
- Para mostrar que  $\mathbf{x}^{-1}$  es continua en función de  $(x, y, z)$ , tome  $u \neq \pi$ . Como  $f(v) \neq 0$ , entonces

$$v = C^{-1}(f(v), g(v)) = C^{-1}(\sqrt{x^2 + y^2}, z),$$

es la parametrización inversa de  $C$ , la cual es continua.

# Superficies de revolución

- (aquí se está usando el hecho que toda función continua e inyectiva definida en un compacto tiene inversa continua).
- Por otro lado,

$$\tan \frac{u}{2} = \frac{\sin \frac{u}{2}}{\cos \frac{u}{2}} = \frac{2 \sin \frac{u}{2} \cos \frac{u}{2}}{2 \cos^2 \frac{u}{2}} = \frac{\sin u}{1 + \cos u} = \frac{y/f(v)}{1 + x/f(v)} = \frac{y}{x + \sqrt{x^2 + y^2}},$$

para  $u \neq \pi$ . En ese caso,

$$u = 2 \arctan \frac{y}{x + \sqrt{x^2 + y^2}}, \quad u \neq \pi.$$

En caso  $u \in (\pi - \epsilon, \pi + \epsilon)$ , se tiene  $u = 2 \arctan \frac{y}{x - \sqrt{x^2 + y^2}}$ .

# Superficies de revolución

- Así,  $\mathbf{x}$  es un homeomorfismo.
- Finalmente,

$$D\mathbf{x}(u, v) = \begin{pmatrix} -f(v) \sin u & f'(v) \cos u \\ f(v) \cos u & f'(v) \sin u \\ 0 & g'(v) \end{pmatrix}.$$

Tenemos los determinantes menores

$$\frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} = -f(v)f'(v), \quad \frac{\partial(x, z)}{\partial(u, v)} = -f(v)g'(v) \sin u, \quad \frac{\partial(y, z)}{\partial(u, v)} = f(v)g'(v) \cos u.$$

Como  $C$  es una curva regular, entonces  $C'(v) = (f'(v), g'(v)) \neq 0 \Rightarrow D\mathbf{x}(\mathbf{q})$  es inyectiva.

Esto muestra que  $S$ , la superficie de revolución, es una superficie regular.

# Ejemplos

## Ejemplo: La esfera $S^2$ .

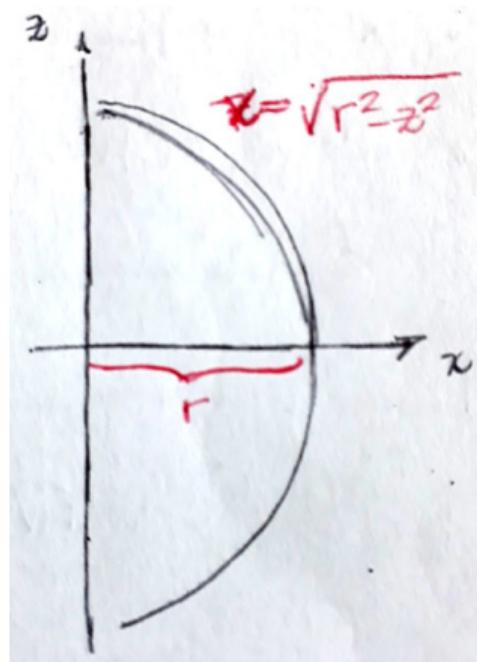
Consideremos la curva  $C : \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \rightarrow \mathbb{R}^2$  dada por

$$C(v) = (r \sin v, r \cos v), \quad v \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right), \quad r > 0.$$

La curva es regular e inyectiva. Siguiendo el proceso descrito anteriormente, podemos girar la curva  $C$  en torno al eje  $Oz$  y construir una superficie de revolución dada por

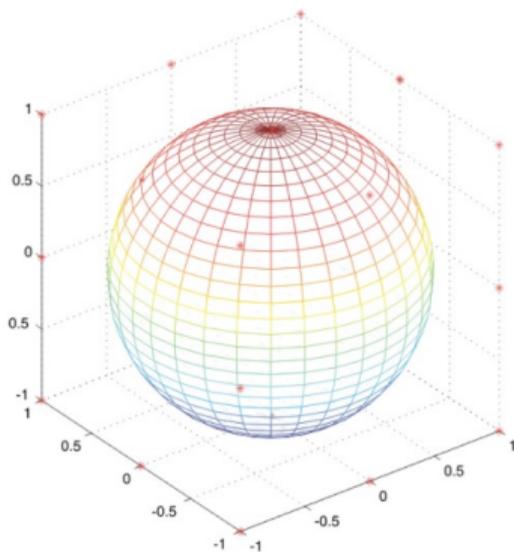
$$\mathbf{x}(u, v) = (r \cos u \sin v, r \sin u \sin v, r \cos v),$$

$$u \in (0, 2\pi), \quad v \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$$



# Ejemplos

Obtenemos la típica parametrización en coordenadas esféricas.

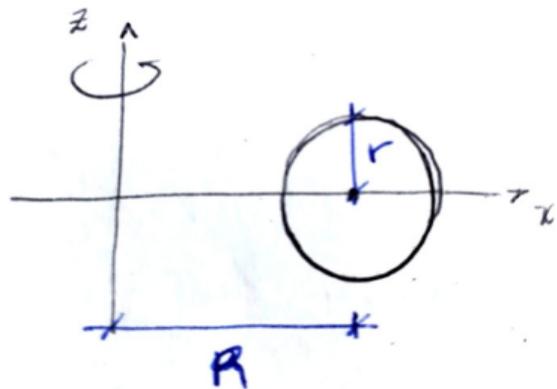


Meridianos = curvas idénticas a  $C$  al variar el parámetro  $u$ .

Paralelos = círculos que se obtienen al fijar el parámetro  $v$ .

# Ejemplos

Ejemplo: El toro bidimensional  $\mathbb{T}^2$ .



Consideramos la curva  $C : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}^2$  dada por

$$C(v) = (R, 0) + (r \cos v, r \sin v), \quad v \in (0, 2\pi),$$

$R > r > 0$ .

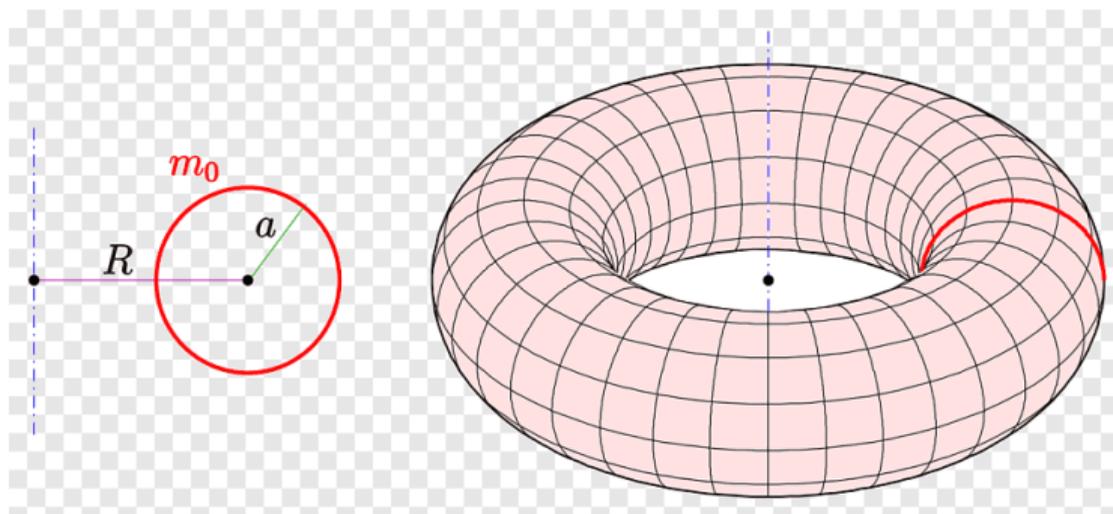
La curva es regular e inyectiva. Construimos la superficie de revolución girando  $C$  en torno al eje  $Oz$  y obtenemos la parametrización

$$\mathbf{x}(u, v) = ((R + r \cos v) \cos u, (R + r \cos v) \sin u, r \sin v),$$

$u, v \in (0, 2\pi)$ .

# Ejemplos

Esta es la parametrización usual del toro bidimensional.



Observe que, topológicamente, el toro es homeomorfo a  $\mathbb{T} \simeq S^1 \times S^1$ .