El teorema fundamental de curvas

Alan Reyes-Figueroa

Geometría Diferencial (Aula 07) 30.enero.2024

Teorema (Teorema Fundamental de la teoría local de curvas planas)

Sea $\kappa_0 : I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función diferenciable, definida en un intervalo abierto I de $\mathbb{R}$. Entonces, existe una curva plana $\alpha : I \to \mathbb{R}^2$, parametrizada por longitud de arco, tal que $\kappa_\alpha(s) = \kappa_0(s)$, $\forall s \in I$, donde κ_α es la curvatura de α.

Más aún, si $\beta : I \to \mathbb{R}^2$ es otra curva plana, parametrizada por longitud de arco, con $\kappa_\beta(s) = \kappa_0(s)$, $\forall s$, entonces existe un movimiento rígido $M : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ tal que $\beta = M \circ \alpha$. (Esto es, la curva es única a menos de transformaciones rígidas.)

Prueba:
Definimos una función $\theta : I \to \mathbb{R}$ por $\int_{s_0}^{s} \kappa_0(u)\,du$, con $s_0 \in I$.
Entonces, θ es diferenciable, y corresponde (a menos de una constante) al ángulo que forma el tangente $\mathbf{t}(s)$ con el eje Ox.
Si definimos

$$\alpha(s) = \Big(\int_{s_0}^{s} \cos\theta(u)\,du, \int_{s_0}^{s} \sin\theta(u)\,du \Big), \quad s_0 \in I.$$

Luego $\mathbf{t}(s) = \alpha'(s) = (\cos\theta(s), \sin\theta(s))$, tenemos que $|\alpha'(s)| = 1$, $\forall s$. Luego, α es una curva parametrizada por longitud de arco.
Su referencial de Frenet es

$$\mathbf{t}(s) = (\cos\theta(s), \sin\theta(s)), \;\; \mathbf{n}(s) = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \mathbf{t} = (-\sin\theta(s), \cos\theta(s)).$$

Por otro lado, $\mathbf{t}'(s) = (-\theta'(s)\sin\theta(s), \theta'(s)\cos\theta(s))$,
y por definición de curvatura, tenemos

$$\kappa_\alpha(s) = \langle \mathbf{t}'(s), \mathbf{n}(s)\rangle = \theta'(s) = \kappa_0(s),$$

como queríamos.

Ahora suponga que $\beta : I \to \mathbb{R}^2$ es otra curvar regular plana, parametrizada por longitud de arco con $\kappa_\beta(s) = \kappa_0(s)$, $\forall s$.
Fijamos $s_0 \in I$. Como los referenciales de Frenet de α y β en s_0, $\{\mathbf{t}_\alpha(s_0), \mathbf{n}_\alpha(s_0)\}$ y $\{\mathbf{t}_\beta(s_0), \mathbf{n}_\beta(s_0)\}$, forman bases ortonormales de $\mathbb{R}^2$, existe una única matriz ortogonal $A \in O(2)$ tal que

$$A\mathbf{t}_\alpha(s_0) = \mathbf{t}_\beta(s_0), \quad A\mathbf{n}_\alpha(s_0) = \mathbf{n}_\beta(s_0).$$

Sea $\mathbf{v} = \beta(s_0) - A\alpha(s_0) \in \mathbb{R}^2$ y considere $M : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ el movimiento rígido $M(\mathbf{x}) = A\mathbf{x} + \mathbf{v}$.

Mostramos que la curva $\gamma = M \circ \alpha$ coincide con β:

$$\begin{aligned}
\gamma(s_0) &= A\alpha(s_0) + \mathbf{v} = \beta(s_0), \\
\mathbf{t}_\gamma(s_0) &= A\mathbf{t}_\alpha(s_0) = \mathbf{t}_\beta(s_0), \\
\mathbf{n}_\gamma(s_0) &= \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \mathbf{t}_\gamma(s_0) = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \mathbf{t}_\beta(s_0) = \mathbf{n}_\beta(s_0).
\end{aligned}$$

Pero, de lo visto anteriormente,

$$\kappa_\gamma(s) = \kappa_\alpha(s) = \kappa_0(s), \quad \forall s \in I.$$

Si definimos $f : I \to \mathbb{R}$ por

$$f(s) = \tfrac{1}{2}[|\mathbf{t}_\beta(s) - \mathbf{t}_\gamma(s)|^2 + |\mathbf{n}_\beta(s) - \mathbf{n}_\gamma(s)|^2],$$

entonces $f(s_0) = 0$ con

$$f'(s) = \langle \mathbf{t}'_\beta(s) - \mathbf{t}'_\gamma(s), \mathbf{t}_\beta(s) - \mathbf{t}_\gamma(s)\rangle + \langle \mathbf{n}'_\beta(s) - \mathbf{n}'_\gamma(s), \mathbf{n}_\beta(s) - \mathbf{n}_\gamma(s)\rangle.$$

De las ecuaciones de Frenet, y el hecho que $\kappa_\beta = \kappa_\gamma = \kappa_0$, tenemos que $f'(s) = 0$, $\forall s \in I$. Luego $f \equiv 0$ se anula en todo punto y entonces

$$\mathbf{t}_\beta(s) - \mathbf{t}_\gamma(s) = \mathbf{0}, \quad \forall s \in I,$$

$\Rightarrow \beta(s) - \gamma(s) = \textit{constante}$. Pero, $\beta(s_0) = \gamma(s_0) \Rightarrow \beta(s) = \gamma(s)$, $\forall s$.
Esto muestra que $\beta = \gamma = M \circ \alpha$. $\square$

Un recordatorio...

Teorema (T. Fundamental de las EDO / Teorema de Picard)

Sea $\mathbf{x}_0 \in \mathbb{R}^n$. Dada $\mathbf{x} : I = (a, b) \to \mathbb{R}^n$ una curva en $\mathbb{R}^n$ y $f : \mathbb{R}^n \times I \to \mathbb{R}^n$ una función continua, y $t_0 \in I$

Entonces existe $\epsilon > 0$ tal que $J = (t_0 - \epsilon, t_0 + \epsilon) \subseteq I$, y existe una función diferenciable $\varphi : J \to \mathbb{R}^n$ tales que

$$\begin{cases} \varphi'(t) = f(\varphi(t), t), \ \ \forall\, t \in J; \\ \qquad\quad \varphi(t_0) = \mathbf{x}_0. \end{cases}$$

Si, además, f es uniformemente Lipschitz continua en I (i.e. la constante Lipschitz es independiente de t) y es continua en t, tal función φ es única.

En otras palabras, existe una única solución del problema de valor inicial

$$\mathbf{x}' = f(\mathbf{x}(t), t), \quad \mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0.$$

Teorema (Teorema Fundamental de la teoría local de curvas en $\mathbb{R}^3$)

Sea $\kappa_0, \tau_0 : I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ funciones diferenciables, definidas en un intervalo abierto I de $\mathbb{R}$, con $\kappa_0 > 0$. Entonces, existe una curva $\alpha : I \to \mathbb{R}^3$, parametrizada por longitud de arco, tal que $\kappa_\alpha(s) = \kappa_0(s)$, $\tau_\alpha(s) = \tau_0(s)$, $\forall s \in I$, donde κ_α y τ_α son la curvatura y torsión de α.

Más aún, si $\beta : I \to \mathbb{R}^3$ es otra curva parametrizada por longitud de arco, con $\kappa_\beta(s) = \kappa_0(s)$ y $\tau_\beta(s) = \tau_0(s)$, $\forall s$, entonces existe un movimiento rígido $M : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ tal que $\beta = M \circ \alpha$.
(Esto es, la curva es única a menos de transformaciones rígidas.)

Prueba: Las ecuaciones de Frenet

$$\underbrace{\begin{pmatrix} \mathbf{t}'(s) \\ \mathbf{n}'(s) \\ \mathbf{b}'(s) \end{pmatrix}}_{\mathbf{x}'(s)} = \begin{pmatrix} 0 & \kappa_0(s) I_3 & 0 \\ -\kappa_0(s) I_3 & 0 & -\tau_0(s) I_3 \\ 0 & \tau_0(s) I_3 & 0 \end{pmatrix} \underbrace{\begin{pmatrix} \mathbf{t}(s) \\ \mathbf{n}(s) \\ \mathbf{b}(s) \end{pmatrix}}_{\mathbf{x}(s)}, \quad \forall s \in I.$$

Definen un sistema de EDO en $\mathbb{R}^9$. Tomamos $\mathbf{x}_0 = (\mathbf{t}_0, \mathbf{n}_0, \mathbf{b}_0) \in \mathbb{R}^9$ de modo que los vectores $\{\mathbf{t}_0, \mathbf{n}_0, \mathbf{b}_0\}$ formen una base ortonormal positiva de $\mathbb{R}^3$.

Sea $\varphi : I \to \mathbb{R}^9$ la solución de este sistema, con condición inicial $\varphi(s_0) = \mathbf{x}_0$ (esta solución existe por el T. Fundamental de las EDO).

Para $\varphi = (f_1, \ldots, f_9)$ entonces, si definimos

$$\mathbf{t}(s) = (f_1, f_2, f_3), \;\; \mathbf{n}(s) = (f_4, f_5, f_6), \;\; \mathbf{b}(s) = (f_7, f_8, f_9), \quad \forall s,$$

obtenemos

$$\begin{aligned} \mathbf{t}'(s) &= \kappa_0(s)\mathbf{n}(s), \\ \mathbf{n}'(s) &= -\kappa_0(s)\mathbf{t}(s) - \tau_0(s)\mathbf{b}(s), \\ \mathbf{b}'(s) &= \tau_0(s)\mathbf{n}(s). \end{aligned}$$

Sea M la matriz cuyas entradas son los productos escalares de **t, n, b**:

$$M(s) = \begin{pmatrix} \mathbf{t}(s)\cdot\mathbf{t}(s) & \mathbf{t}(s)\cdot\mathbf{n}(s) & \mathbf{t}(s)\cdot\mathbf{b}(s) \\ \mathbf{n}(s)\cdot\mathbf{t}(s) & \mathbf{n}(s)\cdot\mathbf{n}(s) & \mathbf{n}(s)\cdot\mathbf{b}(s) \\ \mathbf{b}(s)\cdot\mathbf{t}(s) & \mathbf{b}(s)\cdot\mathbf{n}(s) & \mathbf{b}(s)\cdot\mathbf{b}(s) \end{pmatrix}.$$

Curvas en $\mathbb{R}^3$

De lo anterior, es posible mostrar que

$$M'(s) = A(s)M(s) - M(s)A(s).$$

En detalle, obtenemos el sistema de EDO

$$\begin{aligned}
\langle \mathbf{t}(s), \mathbf{t}(s)\rangle' &= 2\kappa(s)\langle \mathbf{t}(s), \mathbf{n}(s), \rangle \\
\langle \mathbf{n}(s), \mathbf{n}(s)\rangle' &= -2\kappa(s)\langle \mathbf{n}(s), \mathbf{t}(s)\rangle - 2\tau(s)\langle \mathbf{n}(s), \mathbf{b}(s)\rangle, \\
\langle \mathbf{b}(s), \mathbf{b}(s)\rangle' &= 2\tau(s)\langle \mathbf{b}(s), \mathbf{b}(s)\rangle, \\
\langle \mathbf{t}(s), \mathbf{n}(s)\rangle' &= \kappa(s)\langle \mathbf{n}(s), \mathbf{n}(s)\rangle - \kappa(s)\langle \mathbf{t}(s), \mathbf{t}(s)\rangle - \tau(s)\langle \mathbf{t}(s), \mathbf{b}(s)\rangle, \\
\langle \mathbf{t}(s), \mathbf{b}(s)\rangle' &= \kappa(s)\langle \mathbf{n}(s), \mathbf{b}(s)\rangle + \tau(s)\langle \mathbf{t}(s), \mathbf{n}(s)\rangle, \\
\langle \mathbf{n}(s), \mathbf{b}(s)\rangle' &= -\kappa(s)\langle \mathbf{t}(s), \mathbf{b}(s)\rangle - \tau(s)\langle \mathbf{b}(s), \mathbf{b}(s)\rangle + \tau(s)\langle \mathbf{n}(s), \mathbf{n}(s)\rangle.
\end{aligned}$$

donde

$$A(s) = \begin{pmatrix} 0 & \kappa_0(s) & 0 \\ -\kappa_0(s) & 0 & -\tau_0(s) \\ 0 & \tau_0(s) & 0 \end{pmatrix}.$$

Más aún, M satisface la condición inicial $M(s_0) = I_3$. Sin embargo, la función constante $I_3(s) = I_3$ también satisface dicha condición. Por la unicidad de soluciones, $M \equiv I_3$, y entonces $\{\mathbf{t}(s), \mathbf{n}(s), \mathbf{b}(s)\}$ es una base ortonormal de $\mathbb{R}^3$, $\forall s \in I$.

Como consecuencia, $\det[\mathbf{t}(s), \mathbf{n}(s), \mathbf{b}(s)] = \pm 1$. Pero, como $\det[\mathbf{t}(s_0), \mathbf{n}(s_0), \mathbf{b}(s_0)] = 1$, por continuidad de la solución $M(s)$, se tiene que $\{\mathbf{t}(s), \mathbf{n}(s), \mathbf{b}(s)\}$ es una base con orientación positiva, $\forall s \in I$.

Finalmente, definimos $\alpha : I \to \mathbb{R}^3$ por $\alpha(s) = \displaystyle\int_{s_0}^{s} \mathbf{t}(u)\, du$, $\forall s \in I$.

Entonces, α es diferenciable y $\alpha'(s) = \mathbf{t}(s)$. Luego, $|\alpha'(s)| = 1$, $\forall s$, de modo que α es una curva parametrizada por longitud de arco.

Además, $\mathbf{t}'(s) = \kappa_0(s)\mathbf{n}(s)$, y $\kappa_\alpha(s) = |\mathbf{t}'(s)| = \kappa_0(s)$. Finalmente, como $\mathbf{b}'(s) = \tau_0(s)\mathbf{n}(s)$, se tiene $\tau_\alpha(s) = |\mathbf{b}'(s)| = \tau_0(s)$.

<u>Unicidad</u>. La prueba es análoga al caso de curvas planas.
Ahora suponga que $\beta : I \to \mathbb{R}^3$ es otra curvar regular, parametrizada por longitud de arco con $\kappa_\beta(s) = \kappa_0(s)$, $\tau_\beta(s) = \tau_0(s)$, $\forall s$.
Fijamos $s_0 \in I$. Como los referenciales de Frenet de α y β en s_0, $\{\mathbf{t}_\alpha(s_0), \mathbf{n}_\alpha(s_0), \mathbf{b}_\alpha(s_0)\}$ y $\{\mathbf{t}_\beta(s_0), \mathbf{n}_\beta(s_0), \mathbf{b}_\beta(s_0)\}$, forman bases ortonormales de $\mathbb{R}^3$, existe una única matriz ortogonal $A \in O(3)$ tal que

$$A\mathbf{t}_\alpha(s_0) = \mathbf{t}_\beta(s_0), \;\; A\mathbf{n}_\alpha(s_0) = \mathbf{n}_\beta(s_0), \;\; A\mathbf{b}_\alpha(s_0) = \mathbf{b}_\beta(s_0).$$

Sea $\mathbf{v} = \beta(s_0) - A\alpha(s_0) \in \mathbb{R}^3$ y considere $M : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ el movimiento rígido $M(\mathbf{x}) = A\mathbf{x} + \mathbf{v}$.

Mostramos que la curva $\gamma = M \circ \alpha$ coincide con β:

$$\begin{aligned}
\gamma(s_0) &= A\alpha(s_0) + \mathbf{v} = \beta(s_0), \\
\mathbf{t}_\gamma(s_0) &= A\mathbf{t}_\alpha(s_0) = \mathbf{t}_\beta(s_0), \\
\mathbf{n}_\gamma(s_0) &= A\mathbf{n}_\alpha(s_0) = \mathbf{n}_\beta(s_0), \\
\mathbf{b}_\gamma(s_0) &= A\mathbf{b}_\alpha(s_0) = \mathbf{b}_\beta(s_0).
\end{aligned}$$

Luego, $\kappa_\gamma(s) = \kappa_\alpha(s) = \kappa_0(s), \quad \forall s \in I.$

Si definimos $f : I \to \mathbb{R}$ por

$$f(s) = \tfrac{1}{2}\left[|\mathbf{t}_\beta(s) - \mathbf{t}_\gamma(s)|^2 + |\mathbf{n}_\beta(s) - \mathbf{n}_\gamma(s)|^2 + |\mathbf{b}_\beta(s) - \mathbf{b}_\gamma(s)|^2\right],$$

entonces $f(s_0) = 0$ con

$$f'(s) = \langle \mathbf{t}'_\beta - \mathbf{t}'_\gamma, \mathbf{t}_\beta - \mathbf{t}_\gamma \rangle + \langle \mathbf{n}'_\beta - \mathbf{n}'_\gamma, \mathbf{n}_\beta - \mathbf{n}_\gamma \rangle + \langle \mathbf{b}'_\beta - \mathbf{b}'_\gamma, \mathbf{b}_\beta - \mathbf{b}_\gamma \rangle.$$

De las ecuaciones de Frenet, y el hecho que $\kappa_\beta = \kappa_\gamma = \kappa_0$ y $\tau_\beta = \tau_\gamma = \tau_0$, tenemos que $f'(s) = 0$, $\forall s \in I$. Luego $f \equiv 0$ se anula en todo punto y entonces

$$\mathbf{t}_\beta(s) - \mathbf{t}_\gamma(s) = \mathbf{0}, \quad \forall s \in I,$$

$\Rightarrow \beta(s) - \gamma(s) = \textit{constante}$. Pero, $\beta(s_0) = \gamma(s_0) \Rightarrow \beta(s) = \gamma(s)$, $\forall s$.
Esto muestra que $\beta = \gamma = M \circ \alpha$. $\square$

Comentarios sobre el caso de curvas en $\mathbb{R}^n$.
De las ecuaciones de Frenet en $\mathbb{R}^n$

$$\underbrace{\begin{pmatrix} \mathbf{e}_1' \\ \mathbf{e}_2' \\ \vdots \\ \vdots \\ \mathbf{e}_{n-1}' \\ \mathbf{e}_n' \end{pmatrix}}_{F'(s)} = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & \kappa_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ -\kappa_1 & 0 & \kappa_2 & 0 & \ddots & \vdots \\ 0 & -\kappa_2 & 0 & \kappa_3 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & \ddots & \kappa_{n-2} & 0 \\ \vdots & \ddots & 0 & -\kappa_{n-2} & \cdots & \kappa_{n-1} \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & -\kappa_{n-1} & 0 \end{pmatrix}}_{K(s)} \underbrace{\begin{pmatrix} \mathbf{e}_1 \\ \mathbf{e}_2 \\ \vdots \\ \vdots \\ \mathbf{e}_{n-1} \\ \mathbf{e}_n \end{pmatrix}}_{F(s)}, \quad \forall s.$$

El caso general en $\mathbb{R}^n$

Nuevamente define un sistema de EDO $F'(S) = K(s)F(s)$. Dada una condición inicial $F(s_0) = [\mathbf{e}_1(s_0), \ldots, \mathbf{e}_n(s_0)]$, este problema tiene solución única, definida para todo $s \in I$.

Las ecuaciones de Frenet, $F'(s) = K(s)F(s)$ implican

$$
\begin{aligned}
(FF^T)' &= F'F^T + F(F^T)' = F'F^T + F(F')^T = KFF^T + F(KF)^T = KFF^T + FF^TK^T \\
&= KFF^T - FF^TK,
\end{aligned}
$$

o equivalentemente $M' = KM - MK$, para $M = FF^T$.

Esta ecuación, vista como una EDO en la variable FF^T, y dada una condicion inicial, tiene solución única $F(s_0)(F(s_0))^T = I_n$, constante. Por unicidad, esto implica que $FF^T \equiv I_n$, $\forall s$. Luego, $F(s) \in O(n)$, $\forall s$ es una matriz ortogonal, y por la continuidad, se muestra que $\det F(s) = 1$, de modo que $F(s)$ siempre consiste de una base ortonormal con orientación positiva, $\forall s$.

El caso general en $\mathbb{R}^n$

Como la matriz $F(s)$ determina un vector unitario $\mathbf{e}_1(s)$, se define

$$\alpha(s) = \int_{s_0}^{s} \mathbf{e}_1(u)\,du.$$

De ahí $|\alpha'(s)| = |\mathbf{e}_1(s)| = 1$ y α es una curva parametrizada por longitud de arco. De la relación $\mathbf{e}_1' = \kappa_1 \mathbf{e}_2$, $\kappa_1 > 0$, $\mathbf{e}_2$ coincide con el segundo vector de Frenet $(\mathbf{e}_2)_\alpha$, y análogamente para el resto de los $\mathbf{e}_i$.

Así, $F(s)$ representa al referencial de Frenet de la curva α en cada punto s. Similarmente, las κ_i coinciden con las curvaturas de Frenet de α en s.

Por último, la unicidad se prueba de forma idéntica a los casos en dimensión menor.