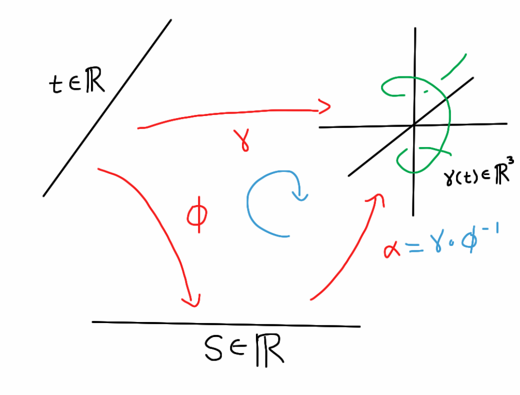
Parametrización por longitud de arco

Alan Reyes-Figueroa

Geometría Diferencial (Aula 03) 16.enero.2024

Reparametrizar una curva γ consiste en componer su parametrización $\gamma(t)$ con otra función $t = \phi(s)$, para obtener una nueva representación $\alpha(s) = (\gamma \circ \phi)(s)$ de la curva.



- Parametrizar una curva como función de su longitud de arco es equivalente a que

$$\int_{t_0}^{t} |\alpha'(\tau)|\, d\tau = t - t_0, \quad \forall t \in I.$$

También es equivalente a hacer $|\alpha'(t)| = 1$, $\forall t \in I$.

(El vector velocidad tiene magnitud constante 1). Esta propiedad será imporante para el desarrollo de la geometría de curvas.

Ejemplo

Consideremos un círculo de radio r, parametrizado por

$$\alpha(t) = (r\cos t, r\sin t), \quad t \in \mathbb{R}.$$

La derivada es $\alpha'(t) = (-r\sin t, r\cos t)$, y $|\alpha'(t)| = \sqrt{r^2\cos^2 t + r^2\sin^2 t} = r$. La longitud de arco a partir de punto $\mathbf{p} = \alpha(0) = (1, 0)$ es

$$s(t) = \int_0^t |\alpha'(\tau)|\, d\tau = \int_0^t r\, d\tau = rt.$$

Despejando t (como función de s), resulta $t = \frac{s}{r}$. Podemos entonces representar la curva como

$$\alpha(s) = (r\cos\tfrac{s}{r}, r\sin\tfrac{s}{r}), \quad s \in \mathbb{R}.$$

Ejemplo

Con la representación anterior

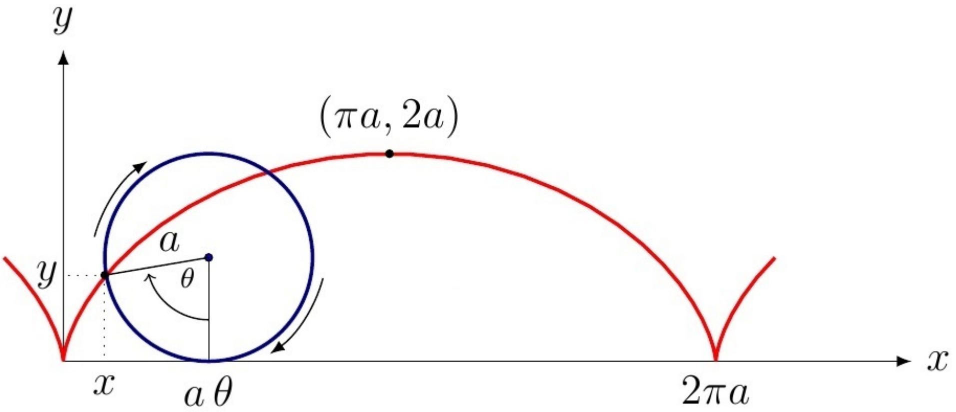
$$\alpha(s) = (r\cos\tfrac{s}{r}, r\sin\tfrac{s}{r}), \quad s \in \mathbb{R}.$$

Se cumple

- $|\alpha'(s)| = |(-\sin\frac{s}{r}, \cos\frac{s}{r})| = \sqrt{\cos^2\frac{s}{r} + \sin^2\frac{s}{r}} = 1, \forall s.$
- $$\int_0^s |\alpha'(\sigma)|\,d\sigma = \int_0^s 1\,d\sigma = s, \quad \forall s.$$

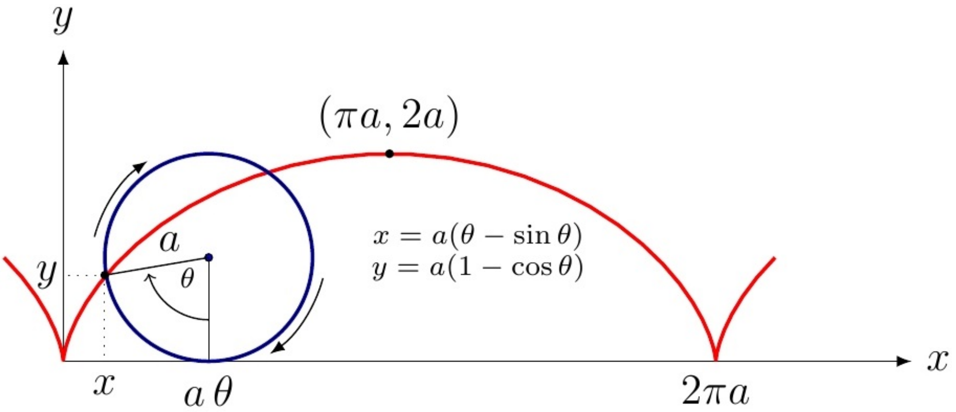
Ejemplo

La cicloide



Ejemplo

La cicloide



Ejemplo

Obtenemos la siguiente parametrización de la cicloide:

$$\gamma(t) = a(t - \sin t, 1 - \cos t), \quad t \in \mathbb{R}.$$

La derivada es $\gamma'(t) = a(1 - \cos t, \sin t)$. Observe que para los puntos $t = 2an\pi$, $n \in \mathbb{Z}$, son puntos singulares para γ.

Entonces, $\gamma(t)$ es una curva regular en el intervalo $(0, 2\pi)$. En este caso $|\gamma'(t)| = a\sqrt{(1 - \cos t)^2 + \sin^2 t} = a\sqrt{2 - 2\cos t} = 2a \sin \frac{t}{2}$.
Luego, la longitud de arco desde $t = 0$ es

$$s = \int_0^t |\gamma'(\tau)|\, d\tau = \int_0^t 2a \sin \frac{\tau}{2}\, d\tau = 4a - 4a \cos \tfrac{t}{2}.$$

Ejemplo

Despejando t en función de s, obtenemos $t = 2\arccos\left(1 - \frac{s}{4a}\right)$, para $s \in (0, 8a)$

Así, obtenemos la reparametrización

$$\begin{aligned}
\gamma(s) &= a\Big(2\arccos\left(1-\tfrac{s}{4a}\right) - \sin\left[2\arccos\left(1-\tfrac{s}{4a}\right)\right], 1 - \cos\left[2\arccos\left(1-\tfrac{s}{4a}\right)\right]\Big) \\
&= a\Big(2\arccos\left(1-\tfrac{s}{4a}\right) - 2\left(1-\tfrac{s}{4a}\right)\sqrt{1-\left(1-\tfrac{s}{4a}\right)^2}, 2 - 2\left(1-\tfrac{s}{4a}\right)^2\Big).
\end{aligned}$$

Otra reparametrización

Dada una curva $\alpha : I \to \mathbb{R}^n$, parametrizada por $s \in I = (a, b)$, podemos considerar una nueva curva $\beta = \alpha \circ \varphi : I \to \mathbb{R}$, haciendo la reparametrización $\varphi : t(s) = a + b - s$.

Ambas α y β tienen el mismo trazo, pero recorrido en sentido contrario:

$$\beta'(t) = \frac{d\beta}{dt} = \frac{d(\alpha \circ \varphi^{-1})}{dt} = \frac{d\alpha}{ds} \cdot \frac{ds}{dt} = \alpha'(s) \cdot (-1) = -\alpha'(s).$$

Esta reparametrización se llama un *cambio de orientación* de α.

Comentarios sobre curvas regulares

Kühnel define una *curva regular* como una cierta clase de equivalencia.

Definición

*Una **curva regular** es una clase de equivalencia de curvas parametrizadas regulares, donde la relación de equivalencia se obtiene a partir de cualquier transformación (que preserva la orientación) del tipo*

$$\varphi : (a, b) \to (a, b),$$

φ biyectiva, continuamente diferenciable, con $\varphi' > 0$.
Así, α y $\alpha \circ \varphi$ se consideran equivalentes.

Obs! Una transformación φ biyectiva, diferenciable (clase C^1), y con inversa φ^{-1} diferenciable, se llama un *difeomorfismo*. Si $\varphi' > 0$, este es un difeomorfismo que preserva la orientación.

Ejercicios

1. Hallar una función biyectiva φ, diferenciable (de clase C^1), con inversa φ^{-1} no diferenciable.

2. Calcular la parametrización por longitud de arco de una hélice

$$\alpha(t) = (r\cos at, r\sin at, bt), \quad t \in \mathbb{R}, \ r, a, b > 0$$

a partir del punto $\mathbf{p} = \alpha(0) = (r, 0, 0)$.

UNIVERSIDAD DEL VALLE DE GUATEMALA