Geometría diferencial

- Superficies mínimas: Helicoide y Catenoide ¿cuál es su relación?

Rudik Rompich

30 de mayo de 2023

Universidad del Valle de Guatemala

Índice

1. Introducción
2. Historia y parametrizaciones
3. Propiedades importantes e interesantes
4. Superficies mínimas
5. Conclusiones

Introducción

Historia y parametrizaciones

1. Descubrimiento de Euler (1744)

El Catenoide fue descubierto por primera vez por el matemático suizo Leonhard Euler en 1744. Describió el Catenoides como una curva catenaria en rotación.

$$x(u, v) = (a \cosh(v) \cos(u), a \cosh(v) \sin(u), av)$$

$$0 < u < 2\pi, -\infty < v < \infty$$

Catenoide

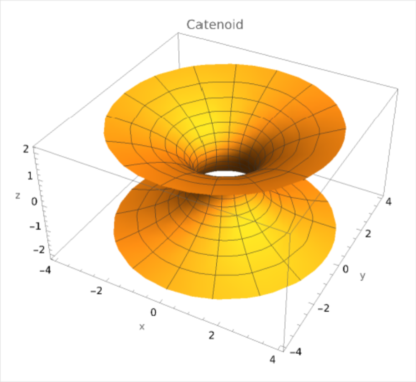

Figura 1: El Catenoide

$x(u,v) = (a\cosh v\cos u, acoshvsinu, av), 0 < u < 2\pi, -\infty < v < \infty$

Catenoide

$$\begin{aligned}
x_u &= (-a\cosh(v)\sin(u), a\cos(u)\cosh(v), 0)\\
x_v &= (a\cos(u)\sinh(v), a\sin(u)\sinh(v), a)\\
x_{uu} &= (-a\cos(u)\cosh(v), -a\cosh(v)\sin(u), 0)\\
x_{vv} &= (a\cos(u)\cosh(v), a\cosh(v)\sin(u), 0)\\
x_{uv} = x_{vu} &= (-a\sin(u)\sinh(v), a\cos(u)\sinh(v), 0)\\
N &= \left(\frac{a^2\cos(u)\cosh(v)}{\sqrt{a^4\cosh^2(v)}}, \frac{a^2\cosh(v)\sin(u)}{\sqrt{a^4\cosh^2(v)}}, \frac{-a^2\cosh(v)\sinh(v)}{\sqrt{a^4\cosh^2(v)}}\right)\\
&= (\cos(u), \sin(u), -\sinh(v))
\end{aligned}$$

Catenoide

$$
\begin{aligned}
E &= a^2\cos^2(u)\cosh^2(v) + a^2\cosh^2(v)\sin^2(u) = a^2\cosh^2(v)\\
F &= 0\\
G &= a^2 + a^2\cos^2(u)\sinh^2(v) + a^2\sin^2(u)\sinh^2(v) = a^2\cosh^2(v)\\
e &= -\frac{a^3\cos^2(u)\cosh^2(v) + a^3\cosh^2(v)\sin^2(u)}{a^2\cosh(v)} = -a\cosh(v)\\
f &= 0\\
g &= \frac{a^3\cos^2(u)\cosh^2(v) + a^3\cosh^2(v)\sin^2(u)}{a^2\cosh(v)} = a\cosh(v)
\end{aligned}
$$

2. Observación de Meusnier (1776)

Jean Baptiste Meusnier demostró que el Helicoide y el Catenoide son localmente isométricos.

$$x(u, v) = (a \sinh(v) \cos(u), a \sinh(v) \sin(u), au)$$

Helicoide

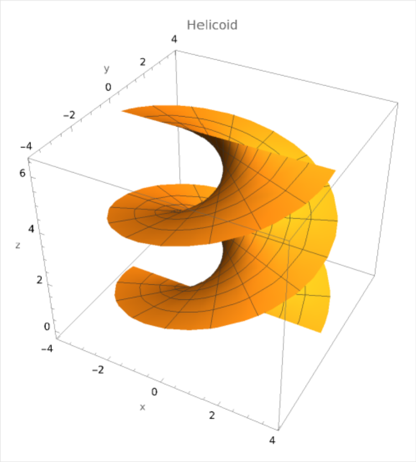

Figura 2: El Helicoide $x(u, v) = (a \sinh v \cos u, a \sinh v \sin u, au)$

Helicoide

$$x_u = (-a\sin(u)\sinh(v), a\cos(u)\sinh(v), a)$$
$$x_v = (a\cos(u)\cosh(v), a\cosh(v)\sin(u), 0)$$
$$x_{uu} = (-a\cos(u)\sinh(v), -a\sin(u)\sinh(v), 0)$$
$$x_{vv} = (a\cos(u)\sinh(v), a\sin(u)\sinh(v), 0)$$
$$x_{uv} = (-a\cosh(v)\sin(u), a\cos(u)\cosh(v), 0)$$
$$x_{vu} = (-a\cosh(v)\sin(u), a\cos(u)\cosh(v), 0)$$
$$N = \left(-\frac{a\cosh(v)\sin(u)}{\sqrt{(\cosh(v)^2+\sinh(v)^2)}}, \frac{a\cos(u)\cosh(v)}{\sqrt{(\cosh(v)^2+\sinh(v)^2)}}, \frac{-a\cosh(v)\sinh(v)}{\sqrt{(\cosh(v)^2+\sinh(v)^2)}}\right)$$

Helicoide

$$
\begin{aligned}
E &= a^2 + a^2\cos(u)^2\sinh(v)^2 + a^2\sin(u)^2\sinh(v)^2 = a^2\cosh(v)^2\\
F &= 0\\
G &= a^2\cos(u)^2\cosh(v)^2 + a^2\sin(u)^2\cosh(v)^2 = a^2\cosh(v)^2\\
e &= 0\\
f &= \frac{a^2\cosh(v)^2}{\sqrt{(\cosh(v)^2 + \sinh(v)^2)}}\\
g &= 0
\end{aligned}
$$

3. Teorema de Bonnet (1848) y 4. Alternativas de Schwarz (1865)

Pierre Ossian Bonnet mostró que existe una familia de superficies mínimas que contiene al Catenoide y al Helicoide [1]. Hermann Amandus Schwarz definió un proceso para alternar entre el Catenoide y el Helicoides, conocido como .ᴬlternativas de Schwarz"[2].

[1] Bonnet, P. O. (1867). Mémoire sur la théorie générale des surfaces. Journal de l'École Polytechnique, 32, 1-151.

[2] Schwarz, H. A. (1865). Bestimmung einer speziellen Minimalfläche. Abhandlungen der Königlichen Akademie der Wissenschaften zu Berlin, 1865, 297-326.

5. Teoría de Superficie Mínima de Hoffman y Meeks (1980s)

David Hoffman y William H. Meeks III hicieron contribuciones significativas a la teoría de superficies mínimas. Descubrieron nuevos ejemplos de superficies mínimas incrustadas completas y proporcionaron nuevas percepciones sobre la relación entre Catenoides y Helicoides [3].

[3] Hoffman, D., & Meeks III, W. H. (1990). Embedded minimal surfaces of finite topology. Annals of Mathematics, 131(1), 1-34.

Propiedades importantes e interesantes

Propiedades Importantes e Interesantes: Isometría Local

- El catenoide y el helicoide son localmente isométricos.
- Es decir, existe una correspondencia uno a uno entre los puntos de estas dos superficies que preserva las distancias.
- Específicamente, las longitudes de las curvas se conservan bajo una transformación que mapea una superficie a la otra.

Proposición 1

Proposición (4.2 - Do Carmo)
Asuma la existencia de parametrizaciones $\mathbf{x} : \mathrm{U} \to \mathrm{S}$ *y* $\bar{\mathbf{x}} : \mathrm{U} \to \overline{\mathrm{S}}$ *tal que* $\mathrm{E} = \overline{\mathrm{E}}, \mathrm{F} = \overline{\mathrm{F}}, \mathrm{G} = \overline{\mathrm{G}}$ *en* U. *Entonces, el mapa* $\varphi = \bar{\mathbf{x}} \circ \mathbf{x}^{-1} : \mathbf{x}(\mathrm{U}) \to \overline{\mathrm{S}}$ *es una isometría local.*

Isometría Local: Superficie de Revolución

Sea S una superficie de revolución y sea

$$\mathbf{x}(u,v) = (f(v)\cos u, f(v)\sin u, g(v)),$$
$$a < v < b, \quad 0 < u < 2\pi, \quad f(v) > 0,$$

una parametrización de S. Los coeficientes de la primera forma fundamental de S en la parametrización $\mathbf{x}$ son dados por

$$E = (f(v))^2, \quad F = 0, \quad G = \left(f'(v)\right)^2 + \left(g'(v)\right)^2.$$

Isometría Local: Superficie de Revolución de la Catenaria

La superficie de revolución de la catenaria

$$x = a\cosh v, \quad z = av, \quad -\infty < v < \infty,$$

tiene la siguiente parametrización:

$$\mathbf{x}(u,v) = (a\cosh v\cos u, a\cosh v\sin u, av),$$
$$0 < u < 2\pi, \quad -\infty < v < \infty,$$

con respecto a la cual los coeficientes de la primera forma fundamental son

$$E = a^2\cosh^2 v, \quad F = 0, \quad G = a^2\left(1 + \sinh^2 v\right) = a^2\cosh^2 v.$$

Isometría Local: Helicoide

Una parametrización para el helicoide es dada por

$$\overline{\mathbf{x}}(\bar{u}, \bar{v}) = (\bar{v}\cos\bar{u}, \bar{v}\sin\bar{u}, a\bar{u}), \quad 0 < \bar{u} < 2\pi, -\infty < \bar{v} < \infty.$$

Hagamos el siguiente cambio de parámetros:

$$\bar{u} = u, \quad \bar{v} = a\sinh v, \quad 0 < u < 2\pi, -\infty < v < \infty,$$

Isometría Local:

El mapa es claramente uno-a-uno, y la matriz Jacobiana del cambio de variables es dada por:

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial \bar{u}}{\partial u} & \frac{\partial \bar{u}}{\partial v} \\ \frac{\partial \bar{v}}{\partial u} & \frac{\partial \bar{v}}{\partial v} \end{bmatrix} \Longrightarrow \begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial u} & \frac{\partial u}{\partial v} \\ \frac{\partial (a \sinh v)}{\partial u} & \frac{\partial (a \sinh v)}{\partial v} \end{bmatrix}$$

Al calcular las derivadas parciales, obtenemos:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & a \cosh v \end{bmatrix}$$

Entonces:

$$\frac{\partial(\bar{u}, \bar{v})}{\partial(u, v)} = a \cosh v$$

no es cero en ninguna parte.

Isometría Local:

Así, una nueva parametrización del helicoide es

$$\overline{\mathbf{x}}(u, v) = (a \sinh v \cos u, a \sinh v \sin u, au),$$

con respecto a la cual los coeficientes de la primera forma fundamental son dados por

$$E = a^2 \cosh^2 v, \quad F = 0, \quad G = a^2 \cosh^2 v.$$

Transformación de Meusnier: De Catenoides a Helicoides

- La transformación permite deformar un catenoide en un helicoide y viceversa, sin necesidad de estiramiento.
- Parametrización de la deformación:

$$
\begin{aligned}
x(u,v) &= \cos\theta\ \sinh v\ \sin u + \sin\theta\ \cosh v\ \cos u \\
y(u,v) &= -\cos\theta\ \sinh v\ \cos u + \sin\theta\ \cosh v\ \sin u \\
z(u,v) &= u\cos\theta + v\sin\theta
\end{aligned}
$$

- Donde $\theta = \pi$ corresponde a un helicoide dextrógiro, $\theta = \pm\pi/2$ corresponde a un catenoide, y $\theta = 0$ corresponde a un helicoide levógiro.

Transformación de Meusnier

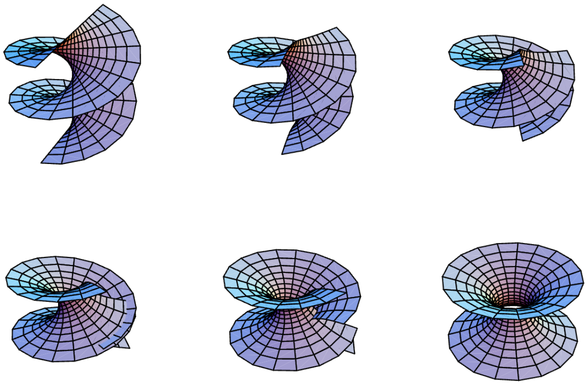

Figura 3: Helicoide dextrógiro, catenoide y helicoide levógiro

Superficies mínimas

Laplaciano

Definición

El Laplaciano Δf de una función diferenciable $f : U \subset R^2 \to R$ se define por $\Delta f = \left(\partial^2 f / \partial u^2\right) + \left(\partial^2 f / \partial v^2\right), (u, v) \in U$. Decimos que f es armónica en U si $\Delta f = 0$.

Superficie mínima

Corolario
Sea $\mathbf{x}(\mathrm{u}, \mathrm{v}) = (\mathrm{x}(\mathrm{u}, \mathrm{v}), \mathrm{y}(\mathrm{u}, \mathrm{v}), \mathrm{z}(\mathrm{u}, \mathrm{v}))$ *una superficie parametrizada y supongamos que* $\mathbf{x}$ *es isotérmica. Entonces* $\mathbf{x}$ *es mínima si y solo si sus funciones de coordenadas* $\mathrm{x}, \mathrm{y}, \mathrm{z}$ *son armónicas.*

Superficie mínima: Catenoide

El catenoide, dado por

$$\mathbf{x}(u,v) = (a\cosh v\cos u, a\cosh v\sin u, av),$$
$$0 < u < 2\pi, \quad -\infty < v < \infty.$$

Por los problemas anteriores $E = G = a^2\cosh^2 v, F = 0$ y que $\mathbf{x}_{uu} + \mathbf{x}_{vv} = 0$. Por lo tanto, el catenoide es una superficie mínima.

Superficie mínima: Catenoide

Puede caracterizarse como la única superficie de revolución que es mínima.

Superficie mínima: Helicoide

El helicoide dado por:

$$\mathbf{x}(u, v) = (a \sinh v \cos u, a \sinh v \sin u, au).$$

Puede caracterizarse como la única superficie de revolución que es mínima. Tenemos $E = G = a^2 \cosh^2 v, F = 0$, y $\mathbf{x}_{uu} + \mathbf{x}_{vv} = 0$. Así, el helicoide es una superficie mínima.

Superficie mínima: Helicoide

Tiene la propiedad adicional de que es la única superficie mínima, aparte del plano, que también es una superficie reglada.

Curvatura Media Cero

Definición
Sea $S \subseteq \mathbb{R}^3$ superficie regular, $\mathbf{p} \in S$. Sean $\kappa_1 y \kappa_2$ las curvaturas principales de S en $\mathbf{p}$. Definimos la curvatura media de S en $\mathbf{p}$ como

$$H = \frac{1}{2}(\kappa_1 + \kappa_2) = -\frac{1}{2}\operatorname{tr} DN(\mathbf{p}).$$

Definimos la curvatura de Gauss de S en $\mathbf{p}$ como

$$K = \kappa_1 \kappa_2 = \det DN(\mathbf{p})$$

Curvatura Media Cero

- Para una superficie mínima, la curvatura media es cero en cada punto, es decir, $H = \frac{k_1+k_2}{2} = 0$.
- Por lo tanto, para el catenoide y el helicoide, las curvaturas principales en cada punto deben ser opuestas entre sí, es decir, $k_1 = -k_2$.

Conclusiones

Referencias

- Do Carmo, M. P. (2016). Differential geometry of curves and surfaces: Revised and updated second edition. Dover Publications.
- Bonnet, P. O. (1867). Mémoire sur la théorie générale des surfaces. Journal de l'École Polytechnique, 32, 1-151.
- Schwarz, H. A. (1865). Bestimmung einer speziellen Minimalfläche. Abhandlungen der Königlichen Akademie der Wissenschaften zu Berlin, 1865, 297-326.
- Hoffman, D., & Meeks III, W. H. (1990). Embedded minimal surfaces of finite topology. Annals of Mathematics, 131(1), 1-34.