# Superficie de Enneper

Elder Guzmán

**Geometría Diferencial**

31 de mayo de 2023

Universidad del Valle de Guatemala

# Alfred Enneper


**Alfred Enneper** fue un matemático alemán nacido en Barmen el 14 de Junio del año 1830. Enneper obtuvo su PhD bajo la supervisión de Dirichlet en *Georg August University of Göttingen* en 1856 por su trabajo sobre funciones con argumentos complejos. En 1863, Enneper trabajó junto a **Karl Weierstrass** estudiando las superficies mínimas y desarrollaron una clase de parametrización.

# Parametrización de Enneper–Weierstrass

**Enneper** y **Weierstrass** mientras estudiaban las superficies mínimas desarrollaron esta parametrización.

# Parametrización de Enneper–Weierstrass

**Enneper** y **Weierstrass** mientras estudiaban las superficies mínimas desarrollaron esta parametrización.

- $f$ y $g$ son funciones en todo el plano complejo o en el disco unitario.

# Parametrización de Enneper–Weierstrass

**Enneper** y **Weierstrass** mientras estudiaban las superficies mínimas desarrollaron esta parametrización.

- $f$ y $g$ son funciones en todo el plano complejo o en el disco unitario.
- Las funciones $f$ es meromorfa y $g$ es analítica, de tal manera que $fg^2$ es holomorfa.

# Parametrización de Enneper–Weierstrass

**Enneper** y **Weierstrass** mientras estudiaban las superficies mínimas desarrollaron esta parametrización.

- $f$ y $g$ son funciones en todo el plano complejo o en el disco unitario.
- Las funciones $f$ es meromorfa y $g$ es analítica, de tal manera que $fg^2$ es holomorfa.
- $x_k(\xi) = \mathcal{R}\left\{\int_0^{\xi} \phi_k(z)dz\right\} + c, \quad \mathrm{k} = 1{,}2{,}3$

# Parametrización de Enneper–Weierstrass

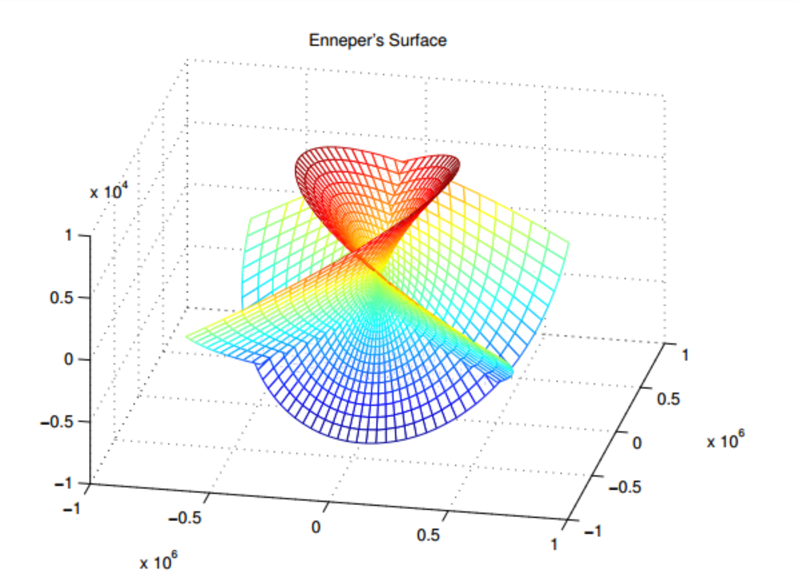
**Enneper** y **Weierstrass** mientras estudiaban las superficies mínimas desarrollaron esta parametrización.

- $f$ y $g$ son funciones en todo el plano complejo o en el disco unitario.
- Las funciones $f$ es meromorfa y $g$ es analítica, de tal manera que $fg^2$ es holomorfa.
- $x_k(\xi) = \mathcal{R}\left\{\int_0^{\xi} \phi_k(z)dz\right\} + c, \quad \mathrm{k} = 1,2,3$
    - $\phi_1 = f(1-g^2)/2$
    - $\phi_2 = \mathbf{i}f(1+g^2)/2$
    - $\phi_3 = fg$

La superficie $(x_1, x_2, x_3)$ es mínima.

# Superficie de Enneper

# Superficie de Ennneper



Usemos la parametrización de Enneper–Weierstrass con $f = 1$ y $g = z$.

# Parametrizaciones

Usemos la parametrización de Enneper–Weierstrass con $f = 1$ y $g = z$. Entonces los $\phi$ quedan de la siguiente forma:

$$\phi_1 = 1(1 - z^2)/2 = \frac{1 - z^2}{2}$$

$$\phi_2 = \mathbf{i}f(1 + z^2)/2 = \frac{1 + z^2}{2}\mathbf{i}$$

$$\phi_3 = z$$

Entonces las componentes quedan:

# Parametrizaciones

Entonces las componentes quedan:

$$x_1(z) = \mathcal{R}\left\{\int_0^z \frac{1-\xi^2}{2} d\xi\right\} = \mathcal{R}\left\{-\frac{1}{6} z(-3+z^2)\right\}$$

# Parametrizaciones

Entonces las componentes quedan:

$$x_1(z) = \mathcal{R}\left\{\int_0^z \frac{1-\xi^2}{2} d\xi\right\} = \mathcal{R}\left\{-\frac{1}{6}z(-3+z^2)\right\}$$

$$x_2(z) = \mathcal{R}\left\{\int_0^z \frac{1+\xi^2}{2}\mathbf{i} d\xi\right\} = \mathcal{R}\left\{\frac{\mathbf{i}}{6}z(3+z^2)\right\}$$

# Parametrizaciones

Entonces las componentes quedan:

$$x_1(z) = \mathcal{R}\left\{\int_0^z \frac{1-\xi^2}{2} d\xi\right\} = \mathcal{R}\left\{-\frac{1}{6}z(-3+z^2)\right\}$$

$$x_2(z) = \mathcal{R}\left\{\int_0^z \frac{1+\xi^2}{2}\mathbf{i} d\xi\right\} = \mathcal{R}\left\{\frac{\mathbf{i}}{6}z(3+z^2)\right\}$$

$$x_3(z) = \mathcal{R}\left\{\int_0^z \xi d\xi\right\} = \mathcal{R}\left\{\frac{1}{2}z^2\right\}$$

Ahora si $z = u + v\mathbf{i}$, obtenemos que:

# Parametrizaciones

Ahora si $z = u + v\mathbf{i}$, obtenemos que:

$$x_1(u,v) = \frac{-1}{6}\mathcal{R}\left\{u^3 + 3u^2v\mathbf{i} - 3uv^2 - v^3\mathbf{i} - 3u - 3v\mathbf{i}\right\}$$

$$x_2(u,v) = \frac{1}{6}\mathcal{R}\left\{\mathbf{i}u^3 - 3u^2v - 3uv^2\mathbf{i} + v^3 + 3u\mathbf{i} - 3v\right\}$$

$$x_3(u,v) = \frac{1}{2}\mathcal{R}\left\{u^2 + 2uv\mathbf{i} - v^2\right\}$$

Por lo que finalmente obtenemos:

Por lo que finalmente obtenemos:

$$x_1(u,v) = \frac{1}{6}\left(-u^3 + 3uv^2 + 3u\right)$$

$$x_2(u,v) = \frac{1}{6}\left(v^3 - 3vu^2 - 3v\right)$$

$$x_3(u,v) = \frac{1}{2}\left(u^2 - v^2\right)$$

Modificando un poco las parametrizaciones, obtenemos:

$$\mathbf{x}(u,v) = \left(u - \frac{u^3}{3} + uv^2, \frac{v^3}{3} - vu^2 - v, u^2 - v^2\right)$$

Modificando un poco las parametrizaciones, obtenemos:

$$\mathbf{x}(u, v) = \left(u - \frac{u^3}{3} + uv^2, \frac{v^3}{3} - vu^2 - v, u^2 - v^2\right)$$

Otra parametrización de esta superficie se da en polares, con lo que obtenemos:

$$\mathbf{x}(r, \theta) = \left(r\cos\theta - \frac{r^3}{3}\cos 3\theta, r\sin\theta + \frac{r^3}{3}\sin 3\theta, r^2\cos 2\theta\right)$$

## Propiedades

- Es una superficie que se auto-intersecciona.

## Propiedades

- Es una superficie que se auto-intersecciona.
- Se tiene que:
  - $J = (1 + u^2 + v^2)^4/81$
  - $K = \frac{-4}{9J}$
  - $H = 0$

## Propiedades

- Es una superficie que se auto-intersecciona.
- Se tiene que:
    - $J = (1 + u^2 + v^2)^4/81$
    - $K = \frac{-4}{9J}$
    - $H = 0$
- Osserman probó que una superficie minimal en $\mathbb{R}^3$ con una curvatura total de $-4\pi$ es el catenoide o la superficie de Enneper.