La superficie de Costa

Seminario de Geometría Diferencial 2023

Oscar Godoy

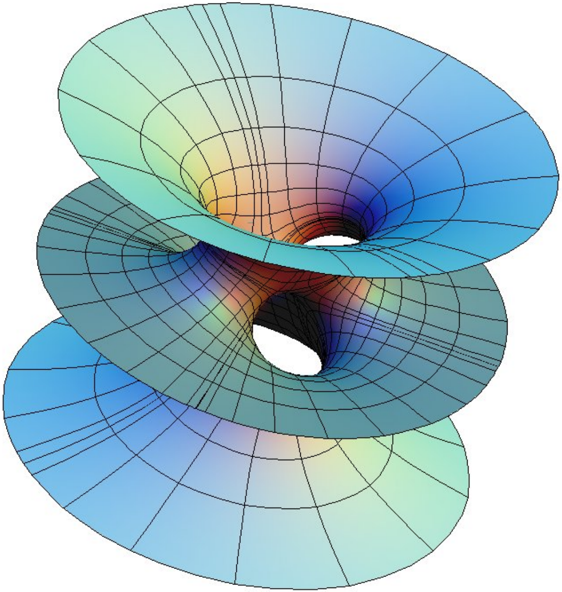
Universidad del Valle de Guatemala

Un poco de historia

- La superficie fue definida por el matemático brasileño Celso Costa en su disertación doctoral en IMPA en 1982, bajo la supervisión de Manfredo do Carmo.
- En su disertación, Costa mostró que su superficie era mínima, compacta y con curvatura total finita, aunque no mostró que era incrustable en $\mathbb{R}^3$ [Costa, 1984].
- Dos años después, los matemáticos Hoffman y Meeks prueban que la inmersión de Costa es en efecto una superficie incrustable en $\mathbb{R}^3$ y generalizan su resultado. [Hoffman and Meeks, 1984]
- El evento genera interés por el estudio de superficies mínimas y desencadena una serie de resultados por otros matemáticos [Glasser, 2004]

Propiedades interesantes

- La superficie de Costa S fue la primera superficie mínima, compacta, y con topología finita descubierta después del plano, el catenoide y el helicoide.
- Fue la primera de dichas superficies con genus positivo.
- Esta es homeomorfa a un toro con 3 agujeros y posee genus 1.
- Su característica de Euler es $\chi(S) = -3$, por lo que posee curvatura total $-12\pi = 2\pi(\chi(S) - 3)$ por el teoerma de Gauss-Bonnet.
- S posee un grupo de simetrías D_4.



Representación de Weierstrass

[Costa, 1984]

Esta es la parametrización que Costa ofreció inicialmente en 1982 de la superficie, la cual se base en el siguiente teorema

Teorema (Representación de Weierstrass)

Sean $\phi : U \to \mathbb{C}$ una función holomorfa y $\psi : U \to \mathbb{C}$ una función meromorfa tales que $\phi^2\psi$ es holomorfa. Entonces, la superficie con coordenadas siguientes es mínima:

$$x(u,v) = \Re \int_{z_0}^{z} \frac{1}{2}\phi(\zeta)(1-\psi(\zeta)^2)\,d\zeta,$$

$$y(u,v) = \Re \int_{z_0}^{z} \frac{i}{2}\phi(\zeta)(1+\psi(\zeta)^2)\,d\zeta,$$

$$z(u,v) = \Re \int_{z_0}^{z} \frac{1}{2}\phi(\zeta)\psi(\zeta)\,d\zeta.$$

Las funciones que escogió Costa para su parametrización son no triviales, pues dependen de la función elíptica de Weiestrass $\wp$ y de su derivada. Las funciones ϕ y ψ escogidas fueron

$$\phi(z) = \wp(z), \qquad \psi(z) = = \frac{2\wp(1/2)\sqrt{2\pi}}{\wp'(z)}.$$

La disertación de Costa prueba que dichas funciones cumplen los requisitos en el teorema de representación anterior. Antes de discutir los argumentos, damos un poco de contexto respecto a la funciones $\wp$ y $\wp'$ y de la definición de su dominio.

Definición (Función $\wp$ de Weierstrass)

Sean $\omega_1, \omega_2 \in \mathbb{C}$ dos números complejos linealmente independientes sobre $\mathbb{R}$. Estos definen un retículo de puntos

$$\Lambda = \omega_1\mathbb{Z} + \omega_2\mathbb{Z} = \{m\omega_1 + n\omega_2 : m, n \in \mathbb{Z}\}.$$

La función $\wp$ de Weierstrass con parámetros ω_1, ω_2 se define como

$$\wp(z, \omega_1, \omega_2) = \frac{1}{z^2} + \sum_{\lambda \in \Lambda - \{0\}} \frac{1}{(z-\lambda)^2} - \frac{1}{z^2}.$$

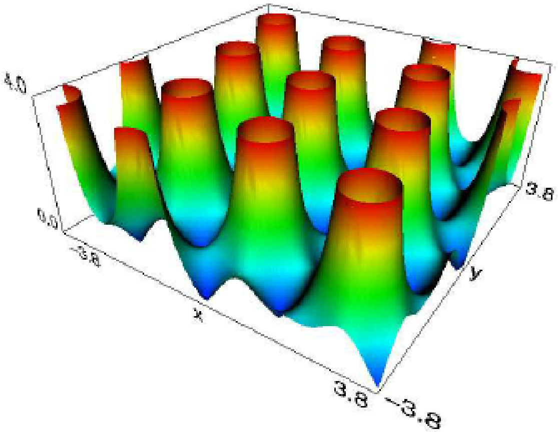


Figura: Función $\wp$ de Weiestrass

Propiedades de la función $\wp$:

- $\wp$ converge absolutamente en $\mathbb{C} - \Lambda$.
- $\wp$ es meromorfa, con derivada $\wp'(z) = -2 \displaystyle\sum_{\lambda \in \Lambda} \frac{1}{(z-\lambda)^3}$.
- Los polos de $\wp$ son precisamente los puntos en Λ.
- Las funciones $\wp$ y $\wp'$ son *elípticas*, lo cual significa que son meromorfas y cumplen con

$$\wp(z) = \wp(z+\lambda) \quad \text{y} \quad \wp'(z) = \wp'(z+\lambda), \quad \forall \lambda \in \Lambda.$$

Costa trabaja con el retículo de puntos Λ generado por $\omega_1 = 1$ y $\omega_2 = i$. Se considera al cociente $\mathbb{C}/\Lambda$, el cual es homeomorfo al toro, y a la proyección canónica $p : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}/\Lambda$. En el toro se identifican a $Q_1 = p(\omega_1/2)$, $Q_2 = p(0)$ y $Q_3 = p(\omega_2/2)$.

El dominio de las funciones ϕ, ψ se define entonces como $M = \mathbb{C}/\Lambda - \{Q_1, Q_2, Q_3\}$, el cual es homeomorfo al toro con 3 agujeros.

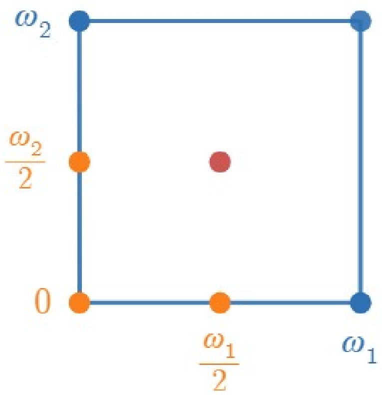


Figura: Dominio fundamental de $\wp$.

Prueba de las propiedades de ϕ:

- *ϕ es holomorfa:* Como $\phi = \wp$ es meromorfa en $\mathbb{C}$ con únicos polos en Λ, ϕ es holomorfa en $\mathbb{C} - \Lambda$, o bien, $\mathbb{C}/L - \{Q_2\}$. Se sigue que ϕ es holomorfa en $M = \mathbb{C}/L - \{Q_1, Q_2, Q_3\}$.

- *ψ es meromorfa:* Como $\psi = a/\wp'$, basta identificar los ceros de $\wp'$. De una aplicación del Teorema del Residuo de Cauchy y el Teorema del Argumento en Análisis Complejo, las funciones elípticas $\wp$ y $\wp'$ tienen la misma cantidad de polos y ceros en $\mathbb{C}/\Lambda$. Como $\wp'$ tiene un único polo de orden 3 en $\mathbb{C}/\Lambda$, la suma de ordenes de los ceros de $\wp'$ es 3 $\implies$ ψ es meromorfa.

- $\phi^2\psi$ *es holomorfa:* Buscamos el orden de los polos de $\psi = a/\wp'$ y revisamos que estos sean ceros orden doble de $\phi = \wp$. Los polos de ψ se encuentran en los ceros de $\wp'$. Puede revisarse que ψ tiene ceros en $\omega_1/2$, $\omega_2/2$ y $\omega_1/2 + \omega_2/2$. Como $\wp'$ tiene un único polo de orden 3 en $\mathbb{C}/\Lambda$, ψ posee exactamente 3 ceros simples.

  $\omega_1/2$ y $\omega_2/2$ no son problema, pues no están en $M = \mathbb{C}/L - \{Q_1, Q_2, Q_3\}$. Otros breves cálculos muestran que $\wp$ y $\wp'$ se anulan en $\omega_1/2 + \omega_2/2$, de modo que este es un cero de orden 2 de ϕ. Esto exhausta los polos de ψ, por lo que $\phi^2\psi$ es holomorfa en M.

Parametrización explícita

[Gray, 1996]

Una parametrización alternativa fue descubierta por Gray en 1996. Esta evade las integrales complejas de la representación de Weierstrass, y emplea la función ζ de Riemann. Sus coordenadas son:

$$x(u,v) = \frac{1}{2}\Re\left(-\zeta(z) + \pi u + \frac{\pi^2}{4\wp(\omega_1)} + \frac{\pi}{2\wp(\omega_1)}\left[\zeta(z-\omega_1) - \zeta(z-\omega_2)\right]\right),$$

$$y(u,v) = \frac{1}{2}\Re\left(-i\zeta(z) + \pi v + \frac{\pi^2}{4\wp(\omega_1)} - \frac{\pi}{2\wp(\omega_1)}\left[i\zeta(z-\omega_1) - i\zeta(z-\omega_2)\right]\right),$$

$$z(u,v) = \frac{1}{4}\sqrt{2\pi}\ln\left|\frac{\wp(z)-\wp(\omega_1)}{\wp(z)+\wp(\omega_1)}\right|.$$

Referencias

Costa, C. (1984).
Example of a complete minimal immersion in R3 of genus one and three-embedded ends.
Brazilian Mathematical Society.

Glasser, D. (2004).
Modern examples of complete embedded minimal surfaces of finite total curvature.
MIT OpenCourseWare.

Hoffman, D. and Meeks, W. (1984).
Complete embedded minimal surfaces of finite total curvature.
American Mathematical Society.