UNIVERSIDAD DEL VALLE DE GUATEMALA
CAMPUS CENTRAL
FACULTAD DE CIENCIAS Y HUMANIDADES

Iniciativa Académica de Geometría Diferencial

1 Identificación

Curso:	MM3013 – Geometría Diferencial	**Créditos:**	4
Ciclo:	Primero	**Requisitos:**	Análisis de Variable Real 2
Año:	2023		Álgebra Lineal 2
			Topología
Profesor:	Alan Reyes–Figueroa	**Horario:**	Martes y jueves – 19:50-21:25
Email:	agreyes	**Sala:**	CIT-641.

Sitio Web del Curso:

- https://pfafner.github.io/gd2023

Office Hours:

- Viernes de 18:00 a 20:00 hrs, por solicitud del estudiante. Pueden enviar sus dudas por correo electrónico.

2 Descripción

Este es un curso introductorio al estudio de la geometría diferencial real, esto es, la combinación de herramientas de cálculo, análisis, álgebra lineal y ecuaciones diferenciales, para hacer geometría en $\mathbb{R}^n$. Se estudia principalmente los fundamentos de las curvas y superfícies, así como una introducción a las variedades diferenciables.

Inicialmente se hace un estudio de la teoría local de curvas parametrizadas en $\mathbb{R}^n$, para luego hacer una breve revisión de aspectos globales sobre curvas. Luego, se el curso introduce la teoría de superficies regulares en $\mathbb{R}^n$, se estudia la primera y segunda forma fundamental y el concepto de orientabilidad de superfícies. Posteriormente se introduce al estudio de propiedades intrínsecas de las superfícies, como la aplicación de Gauß, la derivada covariante, el transporte paralelo, geodésicas, y el Teorema de Gauß-Bonnet. Particularmente se hace énfasis en la construcción de los símbolos de Christoffel y las superfícies mínimas. En esta parte, primero se introduce el material para las superfícies en $\mathbb{R}^3$, y luego se extiende la teoría a superfícies en $\mathbb{R}^n$.

La última parte del curso introduce la noción de variedad diferenciable, así como los mapeos entre variedades. Se estudian los conceptos de conexión Riemanniana, los fibrados tangente y cotangente y se hace una introducción a las formas diferenciales. Como una aplicación, se introduce al estudio de los tensores de Ricci, de Riemann y de Einstein, y se estudia la curvatura de la variedad de Minkowski $\mathbb{R}^3_1$, la cual se utiliza en la teoría de la relatividad.

3 Competencias a Desarrollar

Competencias genéricas

1. Piensa de forma crítica y analítica.
2. Resuelve problemas de forma efectiva.

3. Desarrolla habilidades de investigación y habilidades de comunicación científica a través de seminarios y presentaciones ante sus colegas.

Competencias específicas

1.1 Describe la geometría de las curvas parametrizadas en $\mathbb{R}^n$.

1.2 Conoce y domina los principales teoremas relacionados con la teoría local y global de curvas planas.

1.3 Comprende los conceptos e invariantes principales asociados a superficies en $\mathbb{R}^n$: orientación, primera y segunda formas fundamentales, mapeo de Gauss, curvatura, geodésicas, símbolos de Christoffel.

2.1 Domina las técnicas y demostraciones de los resultados principales la teoría de curvas y superficies.

2.2 Comprende los pasos esenciales en cada demostración. Argumenta correctamente los teoremas. Aplica estas técnicas para resolver problemas.

2.3 Utiliza un enfoque global para resolver problemas. Utiliza herramientas auxiliares en su solución, como relaciones geométricas, análisis y álgebra, invariantes numéricos, entre otros.

3.1 Desarrolla todas las etapas de una investigación o proyecto aplicado donde se utilizan elementos de la geometría diferencial: anteproyecto, diseño experimental, resultados principales y conclusiones.

3.2 Escribe un artículo científico o reporte técnico sobre un tópico de interés en geometría diferencial o aplicaciones, concretando análisis rigurosos y conclusiones importantes.

3.3 Comunica de manera efectiva, en forma escrita, oral y visual, los resultados de su investigación.

4 Metodología Enseñanza Aprendizaje

El curso se desarrollará durante diecinueve semanas, con cuatro períodos semanales de cuarenta y cinco minutos para desenvolvimiento de la teoría, la resolución de ejemplos y problemas, comunicación didáctica y discusión. Se promoverá el trabajo colaborativo de los estudiantes por medio de listas de ejercicios.

El resto del curso promoverá la revisión bibliográfica y el auto aprendizaje a través de la solución de los ejercicios del texto, y problemas adicionales, y el desarrollo de una monografía. Se espera que el estudiante desarrolle su trabajo en grupo o individualmente, y que participe activamente y en forma colaborativa durante todo el curso.

5 Contenido

1. Curvas parametrizadas: Curvas parametrizadas. Curvas regulares y longitud de arco. Teoría local de las curvas parametrizadas. Fórmulas de Frenet. El teorema fundamental de la teoría local de curvas. La forma canónica local. Propiedades globales de las curvas planas: Desigualdad isoperimétrica, el teorema de los cuatro vértices, la fórmula de Cauchy-Crofton.

2. Superficies: Superficies regulares. Imágenes inversas de valores regulares. Mudanza de parámetros. Funciones diferenciables sobre superficies. Plano tangente. Diferencial de una aplicación. Primera forma fundamental. Áreas. Orientación de superficies. Caracterización de las superficies compactas orientables. Definición geométrica de área.

3. Teoría local de superficies: La aplicación de Gauß. Segunda forma fundamental y curvatura. La aplicación de Gauß en coordenadas locales. Campos de vectores. Superficies de rotación, superficies regladas y superficies mínimas. Hiper-superficies en $\mathbb{R}^{n+1}$.

4. Geometría intrínseca de las superficies: Isometrías. Aplicaciones conformes. Símbolos de Christoffel, ecuaciones de Weingarten. El teorema egregium de Gauß, y las ecuaciones de compatibilidad. La derivada covariante. Transporte paralelo. Geodésicas. El teorema de Gauß-Bonnet y aplicaciones. La aplicación exponencial. Coordenadas polares geodésicas.

5. Variedades diferenciables: El concepto de variedad. Cartas locales. Funciones entre variedades. El fibrado tangenge y el fibrado cotangente. Variedades Riemannianas. Métricas Riemannianas. Conexiones.

6. Tensores: El tensor de curvatura. Curvatura seccional. El tensor de Ricci y el tensor de Einstein.

7. Espacios de curvatura constante: El espacio hiperbólico. Geodésicas y campos de Jacobi. Formas del espacio euclideano 3-dimensional y esférico.

8. Aplicaciones: El espacio de Minkowski $\mathbb{R}^3_1$. Curvas y superficies en el espacio de Minkowski $\mathbb{R}^3_1$. Espacios de Einstein. Variación del funcional de Hilbert-Einstein. Ecuaciones de campo de Einstein.

6 Bibliografía

Textos:

- Wolfgang Kühnel. (2015) *Differential Geometry: Curves– Surfaces – Manifolds*, American Mathematial Society. Student Mathematical Library, Vol. 77. 3a. edición.

- Manfredo do Carmo. (1998). *Geometria diferencial de curvas e superfícies*, Sociedade Brasileira de Matemática, 2a. edición.

  Geometría diferencial de curvas y superficies, Alianza Universitaria, Madrid, (1990).

  Differential geometry of curves and surfaces, Dover, USA, (2015).

Artículos:

- S. Walters (2016). *How Einstein Got His Field Equations*. https://arxiv.org/pdf/1608.05752.pdf

- Asaf Pe'er (2014). *Einstein's field equation*. http://www.physics.ucc.ie/apeer/PY4112/Einstein.pdf

Referencias adicionales:

- Sebastián Montiel, Antonio Ros. (2009). *Curves and Surfaces*. AMS. 2a. ed.
- Barrett O'neill (2006). *Elementary Differential Geometry*. Academic Press. 2a. ed.
- Manfredo do Carmo (2015). *Geometria Riemanniana*. IMPA. 2a. ed.
- Michael Spivak (2008). *Calculus on manifolds*. CRC Press.
- Manfredo do Carmo (2000). *Differential Forms and Applications*. Springer Universitext.
- John M. Lee (2013). *Introduction to Topological Manifolds*. Springer Graduate Text in Mathematics. 2a. ed.
- John M. Lee (2013). *Introduction to Smooth Manifolds*. Springer Graduate Text in Mathematics. 2a. ed.
- John M. Lee (2018). *Introduction to Riemmanian Manifolds*. Springer Graduate Text in Mathematics. 2a. ed.

7 Actividades de evaluación

Actividad	Cantidad aproximada	Porcentaje
Listas de ejercicios	8	70%
Seminarios	2	30%

8 Cronograma

Semana	Tópico	Fecha	Actividades
1	Introducción y motivación al curso. Curvas parametrizadas.	09-13 enero	
2	Teoría local de curvas. Fórmulas de Frenet.	16-20 enero	
3	Propiedades globales de las curvas planas.	23-27 enero	
4	Superficies regulares. Imágenes inversas de valores regulares. Mudanza de parámetros.	30 enero-03 febrero	
5	Funciones diferenciables sobre superficies. Diferencial de una aplicación.	06-10 febrero	
6	La primera forma fundamental. Áreas. Definición geométrica de área.	13-17 febrero	
7	Orientación de superficies.	20-24 febrero	
8	La aplicación de Gauß. Segunda forma fundamental y curvatura.	27 febrero-03 marzo	
9	Superficies de rotación, superficies regladas y superficies mínimas.	06-10 marzo	
10	Geometría intrínseca de las superficies: Isometrías. Aplicaciones conformes.	13-17 marzo	
11	Símbolos de Christoffel, ecuaciones de Weingarten. Teorema egregium de Gauß	20-24 marzo	
12	La derivada covariante. Transporte paralelo. Geodésicas y campos de Jacobi.	27-31 marzo	
	Semana Santa	03-07 abril	
13	Superficies mínimas.	10-14 abril	Seminario
14	El teorema de Gauß-Bonnet y aplicaciones.	17-21 abril	
15	Variedades diferenciables. Cartas locales. Funciones entre variedades.	24-28 abril	
16	Fibrado tangente y cotangente. Variedades Riemannianas. Métricas Riemannianas y conexiones.	01-05 mayo	
17	Tensores: tensor de curvatura. El tensor de Ricci y el tensor de Einstein.	08-12 mayo	
18		15-19 mayo	
19	Espacios de curvatura constante. Espacio hiperbólico. Espacio euclideano 3-dimensional y esférico.	22-26 mayo	Seminario
20	Aplicaciones: El espacio de Minkowski $\mathbb{R}^3_1$. Espacios de Einstein. Ecuaciones de campo.	30 mayo-03 junio	Seminario