Geometría Diferencial 2023

Lista 06

23.mayo.2023

1. a) Pruebe que toda superficie regular compacta S posee un punto elíptico.
   b) Muestre que toda superficie regular compacta S, con característica $\chi(S) \leq 0$ posee un punto hiperbólico.

2. Compruebe que no existe superficie $\mathbf{x}(u, v)$ tal que $E = G = 1$, $F = 0$ y que $e = 1$, $g = -1$, $f = 0$.

3. Justifique por qué las superficies siguientes no son localmente isométricas dos a dos:
   a) la esfera S^2,
   b) el cilindro $S^1 \times \mathbb{R}$,
   c) la silla $z = x^2 - y^2$.

4. a) Dar la expresión para la ecuación de las geodésicas sobre el toro $\mathbb{T}^2$, con la parametrización usual

$$\mathbf{x}(u, v) = \big((R + r\cos v)\cos u, (R + r\cos v)\sin u, r\sin v\big), \quad R > r > 0,\ u, v \in (0, 2\pi).$$

   b) Considere las curvas $\alpha(t) = \mathbf{x}(a, bt)$ y $\beta(t) = \mathbf{x}(at, b)$, con $a, b \in \mathbb{R}$, $t \in \mathbb{R}$. Determinar para qué valores de a, b estas curvas son geodésicas.

   Obs! No son las únicas geodésicas sobre el toro. El siguiente documento ilustra todas las familias de las geodésicas sobre $\mathbb{T}^2$.
   `http://www.rdrop.com/~half/math/torus/torus.geodesics.pdf`

5. Leer el punto 7, al final de la sección 4.5 del libro de Do Carmo (pp. 283–286). Entender el material, y probar el **Teorema del Índice de Poincaré**:
   La suma de los índices de un campo vectorial diferenciable X con puntos singulares sobre una superficie compacta S, es igual a la característica de Euler de S, esto es

$$\sum_{\mathbf{p} \in S} I\big(X(\mathbf{p})\big) = \chi(S).$$
