Geometría Diferencial 2023

Lista 05

21.abril.2023

1. Determinar las curvas asintóticas del catenoide

$$\mathbf{x}(u,v) = (\cosh u \cos v, \cosh u \sin v, v), \quad u, v \in \mathbb{R}.$$

2. Considere la superficie de Enneper

$$\mathbf{x}(u,v) = \Big(u - \frac{u^3}{3} + uv^2, v - \frac{v^3}{3} + vu^2, u^2 - v^2\Big), \quad u, v \in \mathbb{R},$$

y mostrar que

a) Los coeficientes de la primera forma fundamental son

$$E = G = (1 + u^2 + v^2)^2, \quad F = 0.$$

b) Los coeficientes de la segunda forma fundamental son

$$e = 2, \quad g = -2, f = 0.$$

c) Las cuvaturas principales están dadas por

$$\kappa_1 = \frac{2}{(1 + u^2 + v^2)^2}, \quad \kappa_2 = -\frac{2}{(1 + u^2 + v^2)^2}.$$

d) Las líneas de curvatura son las curvas coordenadas.

e) Las curvas asintóticas son de la forma $u + v = const.$, $u - v = const.$

3. (La Pseudoesfera)
Consideramos la curva *tractriz* (ver ejercicio 3 en Lista 01).

a) Determine la superficie de revolución que se obtiene a partir de la tractriz, y hallar una parametrización alrededor de un punto regular.

b) Muestre que la curvatura gaussiana de esta superficie en todo punto regular vale $K = -1$.

4. Sea $\mathbf{x}(u,v)$ un segmento de una superficie regular (orientable) S. Una **superficie paralela** a S es una superficie parametrizada por

$$\mathbf{y}(u,v) = \mathbf{x}(u,v) + aN(u,v),$$

donde $a \in \mathbb{R}$ y N es el campo normal unitario a $\mathbf{x}$.

a) Muestre que $\mathbf{y}_u \times \mathbf{y}_v = (1 - 2Ha + Ka^2)\mathbf{x}_u \times \mathbf{x}_v$, donde H y K son las curvaturas media y gaussiana de $\mathbf{x}$.

b) Pruebe que en los puntos regulares, las curvaturas media y gaussiana de $\mathbf{y}$ son

$$H_{\mathbf{y}} = \frac{K}{1 - 2Ha + Ka^2}, \quad K_{\mathbf{y}} = \frac{H - Ka}{1 - 2Ha + Ka^2}.$$

5. Consideramos la parametrización usual del toro $\mathbb{T}^2$, y definimos un mapa $\Phi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{T}^2$ dado por

$$\Phi(u, v) = \big((R + r\cos u)\cos v, (R + r\cos)\sin v, r\sin u\big), \quad R > r > 0.$$

Sea $u = at$, $v = bt$ una recta en $\mathbb{R}^2$ pasando por $(0, 0) \in \mathbb{R}^2$, y considere la curva sobre el toro data por $\alpha(t) = \Phi(at, bt)$. Muestre que

a) Φ es un difeomorfismo local.

b) La curva $\alpha(t)$ es una curva regular; $\alpha(t)$ es una curva cerrada si, y sólo si, $\frac{b}{a}$ es un número racional.

c) Pruebe o de evidencia empírica de lo siguiente: Si $\frac{b}{a}$ es irracional, la curva $\alpha(t)$ es densa en $\mathbb{T}^2$.

6. Mostrar la **ecuación de Gauss**. Si S es una superficie con parametrización ortogonal, $F = 0$, entonces

$$K = -\frac{1}{\sqrt{EG}}\Big[\frac{\partial}{\partial v}\Big(\frac{E_v}{\sqrt{EG}}\Big) + \frac{\partial}{\partial u}\Big(\frac{G_u}{\sqrt{EG}}\Big)\Big].$$
