

Geometría Diferencial 2023

Lista 02

13.febrero.2023

1. Let α una curva de Frenet en \mathbb{R}^n . Muestre que

$$\det[\alpha', \alpha'', \alpha''', \dots, \alpha^{(n)}] = \prod_{i=1}^{n-1} \kappa_i^{(n-i)}.$$

2. Construir una curva, no planar, de clase C^∞ en \mathbb{R}^3 , que sea una curva de Frenet, excepto en un único punto, y que fuera de ese punto, satisfice $\tau \equiv 0$.

3. (a) Sea $\alpha : [0, L] \rightarrow \mathbb{R}^2$ una curva plana, cerrada y simple, parametrizada por longitud de arco. Suponga que $0 \leq \kappa(s) \leq c$, $\forall s \in [0, L]$, para alguna constante $c > 0$. Probar que $L \geq \frac{2\pi}{c}$.

(b) Si reemplazamos la hipótesis de α ser simple por α tiene índice de rotación I , probar que $L \geq \frac{2\pi I}{c}$.

4. Sea $\alpha : [0, L] \rightarrow \mathbb{R}^2$ una curva plana, cerrada y convexa, orientada de forma positiva. La curva

$$\beta(s) = \alpha(s) - r\mathbf{n}(s),$$

donde $r > 0$ es una constante positiva y $\mathbf{n}(s)$ es el vector normal de α en s , se llama una *curva paralela* a α . Muestre que

a) $\ell(\beta) = \ell(\alpha) + 2\pi r$.

b) $A(\beta) = A(\alpha) + rL + \pi r^2$.

c) $\kappa_\beta(s) = \frac{\kappa_\alpha(s)}{1 + r\kappa_\alpha(s)}$.

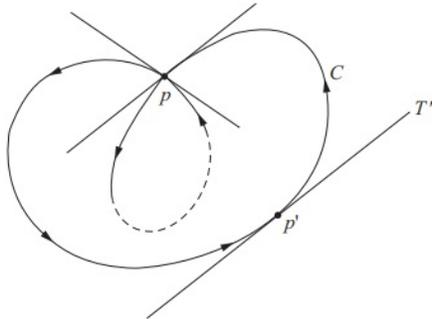
5. Sea $C : [0, L] \rightarrow \mathbb{R}^2$ una curva plana, cerrada, orientada positivamente, con $\kappa > 0$. Asuma que C posee al menos un punto de auto-intersección \mathbf{p} . Demostrar que

a) C posee al menos una tangente doble.

b) Existe un punto \mathbf{p}' cuya tangente a α en \mathbf{p}' es paralela a la tangente a α en \mathbf{p} .

c) El ángulo de rotación de la tangente en el arco positivo de C dado por $\mathbf{pp}'\mathbf{p}$ es mayor a π .

d) El índice de rotación de C es $I \geq 2$.



6. Hallar todos los vértices de la elipse $\gamma(t) = (p \cos t, q \sin t)$, cuando $p \neq q$ (aquí, $p, q > 0$).
