El Teorema de Gauss-Bonnet

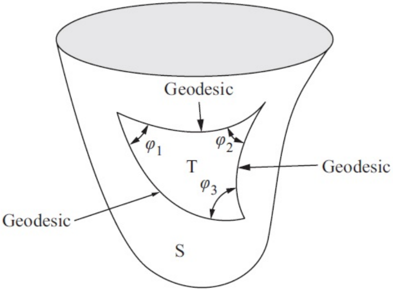
Alan Reyes-Figueroa

Geometría Diferencial

(Aula 32) 23.mayo.2023

Motivación

¿Cuánto suman los ángulos internos en un triángulo?
Respuesta: Depende de la geometría donde yace dicho triángulo.



Una primera versión del teorema fue dada por Gauss en 1848, y trata sobre triángulos geodésicos.

Afirma que el exceso sobre π de la suma de los ángulos internos en un triángulo geodésico T es la integral de la curvatura:

$$\sum_{j=1}^{3} \varphi_j = \pi + \iint_T K\, dS.$$

P. O. Bonnet: extensión a regiones acotadas y a superficies compactas.

UVG UNIVERSIDAD DEL VALLE DE GUATEMALA

Recordemos que si $\mathbf{x} : U \subseteq \mathbb{R}^2 \to S$ es una parametrización ortogonal de S (esto es $F = 0$), entonces la curvatura de Gauss es

$$K = -\frac{1}{2\sqrt{EG}}\Big(\frac{\partial}{\partial u}\Big(\frac{G_u}{\sqrt{EG}}\Big) + \frac{\partial}{\partial v}\Big(\frac{E_v}{\sqrt{EG}}\Big)\Big). \tag{1}$$

Proposición

Sea S superficie regular en $\mathbb{R}^3$, $\mathbf{p} \in S$. Entonces, es posible encontrar una parametrización $\mathbf{x} : U \subseteq \mathbb{R}^2 \to S$, definida en una vecindad U de $\mathbf{q} = \mathbf{x}^{-1}(\mathbf{p})$ tal que $F = 0$ en U. $\square$

De (1), $K\sqrt{EG} = -\frac{1}{2}\big(\frac{\partial}{\partial u}\big(\frac{G_u}{\sqrt{EG}}\big) + \frac{\partial}{\partial v}\big(\frac{E_v}{\sqrt{EG}}\big)\big)$, observe que el término en el lado izquierdo $\sqrt{EG}$ tiene una interpretación geométrica, pues

$$\int_R f\, dS = \int_{\mathbf{x}^{-1}(R)} (f \circ \mathbf{x}) \sqrt{EG}\, du\, dv.$$

Por otro lado, el término del lado derecho tiene una estructura similar a una divergencia $\nabla \cdot H$, para algún campo vectorial H en $\mathbb{R}^2$ (pues $\nabla \cdot H = \operatorname{div} H = \frac{\partial}{\partial u}(H_1) + \frac{\partial}{\partial v}(H_2)$.

Definición

Una región ***regular*** *$\Omega \subset S$ es un abierto conexo de S, con cerradura compacta en S, cuya frontera $\partial\Omega$ es unión finita disjunta de curvas cerradas simples, cada una diferenciable por partes.*
Una región regular es ***simple*** *si es homeomorfa a $\mathbb{D}$.*

Teorema (Teorema de la Divergencia)

Sea $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$ una región regular y sea $X = (P, Q) = P\frac{\partial}{\partial u} + Q\frac{\partial}{\partial v}$ un campo vectorial sobre $\overline{\Omega}$. Sea $\mathbf{n} = (v', -u')$ el vector normal unitario a la curva $\partial\Omega = \alpha(s) = (u, v)$. Entonces

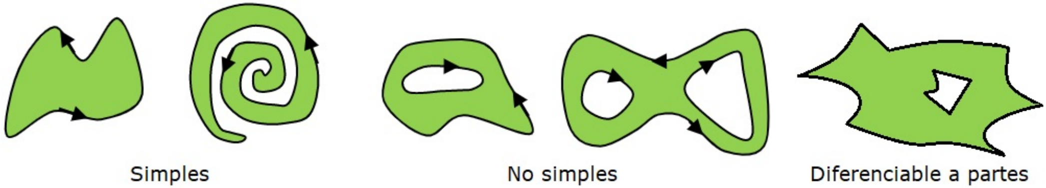
$$\int_{\Omega} \operatorname{div} X \, du \, dv = \int_{\partial\Omega} X \cdot \mathbf{n} \, ds. \qquad \square$$

Esto es, si $\alpha : [a, b] \to \partial\Omega$, con $\alpha(s) = (u(s), v(s))$ es diferenciable en cada subintervalo de la partición $a = t_0 < t_1 < \ldots < t_n = b$ de $[a, b]$, entonces

$$\int_{\Omega} \left(\frac{\partial P}{\partial u} + \frac{\partial Q}{\partial v} \right) du \, dv = \sum_{i=1}^{n} \int_{t_{i-1}}^{t_i} \big(P(\alpha(s)) v'(s) - Q(\alpha(s)) u'(s) \big) \, ds.$$

Definición

Sean $S \subset \mathbb{R}^3$ una superficie orientada, $\partial\Omega = c_1 \cup \ldots \cup c_n$. Diremos que una parametrización $\alpha_i(s)$ de c_i, $i = 1, 2, \ldots, n$, $|\alpha_i'(s)| = 1$, es ***positiva*** *si $\mathbf{n}_i(s) = N \times \alpha_i(s)$ apunta siempre para adentro de Ω, $i = 1, 2, \ldots, n$.*
En ese caso, diremos que $\partial\Omega$ está ***positivamente orientada****.*



UNIVERSIDAD DEL VALLE DE GUATEMALA

Preliminares

Si S es superficie orientada, $\mathbf{x} : U \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ parametrización ortogonal de S, y $\Omega \subseteq \mathbf{x}(U)$ es una región regular simple, con $\partial\Omega = \alpha(s)$ positivamente orientada. Aplicando el Teorema de la Divergencia a $X = (\frac{G_u}{\sqrt{EG}}, \frac{E_v}{\sqrt{EG}})$ y (1)

$$\begin{aligned}\int_\Omega K\,dS &= \int_{\mathbf{x}^{-1}(\Omega)} K\sqrt{EG}\,du\,dv = -\frac{1}{2}\int_{\mathbf{x}^{-1}(\Omega)} \operatorname{div} X\,du\,dv \\ &= -\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\int_{t_{i-1}}^{t_i}\Big(\frac{G_u}{\sqrt{EG}}v'(s) - \frac{E_v}{\sqrt{EG}}u'(s)\Big)\,ds.\end{aligned}$$

- el lado derecho anterior no depende del sistema de coorenadas.
- $\int_\Omega K$ sólo depende del comportamiento de S en una vecindad de $\partial\Omega$.

Recordemos de la clase anterior que la curvatura geodésica de una curva α, $|\alpha'| = 1$, está dada por

$$\kappa_g \alpha(s) = \left[\nabla_\alpha \alpha'(s)\right] = \langle \nabla_\alpha \alpha'(s), N \times \alpha'(s) \rangle.$$

Recordemos también que si X, Y son campos tangentes unitarios, y φ es el ángulo entre ellos, entonces $\varphi'(s) = \left[\nabla_\alpha Y(s)\right] - \left[\nabla_\alpha X(s)\right]$.

En particular, si $X(s) = \frac{\mathbf{x}_u(\alpha(s))}{\sqrt{E}}$ y $Y(s) = \alpha'(s)$, tenemos $|X(s)| = |Y(s)| = 1$, y

Lema

Sea S superficie orientada, $\mathbf{x} : U \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ parametrización ortogonal de S, y $\alpha(s) : I \to \mathbf{x}(U)$ una curva con $|\alpha'(s)| = 1$, $\forall s \in I$, positivamente orientada. Entonces

$$\kappa_g\, \alpha(s) = \frac{1}{2}\left(\frac{G_u}{\sqrt{EG}}\, v'(s) - \frac{E_v}{\sqrt{EG}}\, u'(s) \right) + \frac{d}{ds}\varphi(s).$$

Prueba:
Observe que

$$X'(s) = \frac{d}{ds}\Big(\frac{\mathbf{x}_u}{\sqrt{E}}\Big) = \Big(\frac{\mathbf{x}_{uu}}{\sqrt{E}} - \frac{1}{2}\,\frac{E_u\mathbf{x}_u}{E^{3/2}}\Big)\,u'(s) + \Big(\frac{\mathbf{x}_{uv}}{\sqrt{E}} - \frac{1}{2}\,\frac{E_v\mathbf{x}_u}{E^{3/2}}\Big)\,v'(s).$$

Como $N \times X = \frac{\mathbf{x}_v}{\sqrt{G}}$ y $[\nabla_\alpha X] = \langle \nabla_\alpha X, N \times X\rangle = \langle \nabla_\alpha X, \frac{\mathbf{x}_v}{\sqrt{G}}\rangle$, entonces

$$[\nabla_\alpha X] = \frac{\langle \mathbf{x}_{uu}, \mathbf{x}_v\rangle}{\sqrt{EG}}\,u'(s) + \frac{\langle \mathbf{x}_{uv}, \mathbf{x}_v\rangle}{\sqrt{EG}}\,v'(s).$$

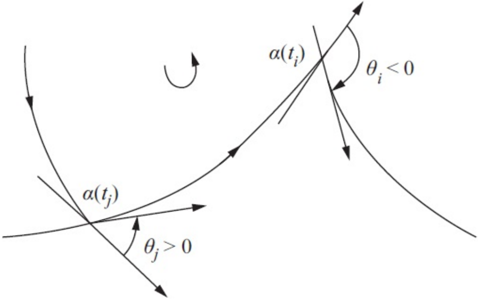
De $\langle \mathbf{x}_{uv}, \mathbf{x}_v\rangle = \frac{1}{2}\langle \mathbf{x}_v, \mathbf{x}_v\rangle_u = \frac{1}{2}G_u$ y $\langle \mathbf{x}_{uu}, \mathbf{x}_v\rangle = -\langle \mathbf{x}_u, \mathbf{x}_{uv}\rangle = -\frac{1}{2}\langle \mathbf{x}_u, \mathbf{x}_u\rangle_v = -\frac{1}{2}E_v$, obtenemos la expresión requerida

$$\kappa_g\,\alpha(s) = \frac{1}{2}\Big(\frac{G_u}{\sqrt{EG}}\,v'(s) - \frac{E_v}{\sqrt{EG}}\,u'(s)\Big) + \frac{d}{ds}\varphi(s),$$

donde $\varphi(s)$ es el ángulo de $X(s)$ a $\alpha'(s)$. $\square$

Preliminares

Tomemos ahora una región $R \subseteq \mathbf{x}(U)$ regular y simple, cuyo borde ∂R es positivamente orientado. Consideramos una parametrización $\alpha : [a, b] \to \mathbb{R}^2$ de $\mathbf{x}^{-1}(\partial R)$, regular por partes en los subintervalos de $a = t_0 < t_1 < \ldots < t_n = b$.
Denotamos por θ_j al ángulo $\theta_j = \alpha'(t_j^+) - \alpha'(t_j^-)$ (ángulos externos a ∂R)



UVG UNIVERSIDAD DEL VALLE DE GUATEMALA

Teorema (Índice de Rotación)

Para una curva cerrada y simple $\alpha : [a,b] \to \mathbb{R}^2$, regular por partes, en $a = t_0 < t_1 < \ldots < t_n = b$, vale

$$\sum_{j=1}^{n} \big(\varphi_j(t_j) - \varphi_j(t_{j-1})\big) + \sum_{j=1}^{n} \theta_j = \pm 2\pi.$$

Aquí, $\varphi_j(s)$ mide el ángulo desde $\mathbf{e}_1$ a $\alpha_j'(s)$ (esto es, el ángulo externo a α en el vértice j); y el signo depende de la orientación de α.

Prueba: Basta considerar

$$\sum_{j=1}^{n} \big(\varphi_j(t_j) - \varphi_j(t_{j-1})\big) + \sum_{j=1}^{n} \theta_j = \int_a^b \theta(s)\,ds = 2\pi \,\text{Index}(\alpha) = \pm 2\pi. \quad \square$$

Sea S superficie orientada, $\mathbf{x} : U \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ una parametrización regular ortogonal, y sea $R \subseteq \mathbf{x}(U)$ una región regular simple, cuya frontera ∂R está parametrizada por una curva $\alpha : [a, b] \to \mathbf{x}(U)$, regular por partes, en $a = t_0 < t_1 < \ldots < t_n = b$, y parametrizada por longitud de arco, con vector normal unitario a ∂R, dado por $\mathbf{n}(s) = (v'(s), -u'(s))$. Entonces

Teorema (Teorema de Gauss-Bonnet local)

$$\int_R K\, dS + \sum_{j=1}^{n} \int_{t_{j-1}}^{t_j} \kappa_g\, \alpha(s)\, ds + \sum_{j=1}^{n} \theta_j = 2\pi.$$

Esto es, $\displaystyle\int_R K\, dS + \int_{\partial R} \kappa_g\, ds + \sum_{j=12}^{n} \theta_j = 2\pi.$

Teorema de Gauss-Bonnet

Prueba: Definamos $X = \left(\frac{G_u}{\sqrt{EG}}, \frac{E_v}{\sqrt{EG}}\right)$, $\mathbf{n} = (v', -u')$. Por el lema, tenemos

$$\begin{aligned}
\sum_{j=1}^{n} \int_{t_{j-1}}^{t_j} \kappa_g\, \alpha(s)\, ds &= \sum_{j=1}^{n} \int_{t_{j-1}}^{t_j} \frac{1}{2}\left(\frac{G_u}{\sqrt{EG}}\,\frac{dv}{ds} - \frac{E_v}{\sqrt{EG}}\,\frac{du}{ds}\right) ds + \sum_{j=1}^{n} \int_{t_{j-1}}^{t_j} \frac{d}{ds}\varphi_j(s)\, ds \\
&= \sum_{j=1}^{n} \int_{t_{j-1}}^{t_j} \frac{1}{2}\left(\frac{G_u}{\sqrt{EG}}\, dv - \frac{E_v}{\sqrt{EG}}\, du\right) + \sum_{j=1}^{n} \varphi_j(s)\Big|_{t_{j-1}}^{t_j} \\
&= \sum_{j=1}^{n} \int_{t_{j-1}}^{t_j} \frac{1}{2} X \cdot \mathbf{n}\, ds + \sum_{j=1}^{n} \varphi_j(s)\Big|_{t_{j-1}}^{t_j} = \iint_R \frac{1}{2}\, \operatorname{div} X\, du\, dv + \sum_{j=1}^{n} \varphi_j(s)\Big|_{t_{j-1}}^{t_j} \\
&= \iint_R -K\sqrt{EG}\, du\, dv + \sum_{j=1}^{n} \left(\varphi_j(t_j) - \varphi(t_{j-1})\right) \\
&= -\iint_R K\, dS - \sum_{j=1}^{n} \theta_j + 2\pi.
\end{aligned}$$

Teorema de Gauss-Bonnet

De ahí que

$$\int_R K\,dS + \sum_{j=1}^{n} \int_{t_{j-1}}^{t_j} \kappa_g\,\alpha(s)\,ds + \sum_{j=1}^{n} \theta_j = 2\pi. \quad \square$$

Obs!

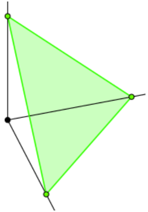
- El Teorema de Gauss-Bonnet local, sobre una región regular R, combina información geométrica de diferentes naturalezas: la curvatura gaussiana en R, la curvatura geodésica en ∂R, más información de los ángulos externos.
- Existe una versión global de Teorema de Gauss-Bonnet sobre una superficies compacta S. Esta combina además, información topológica de S.

Mencionamos ahora varios conceptos topológicos que serán de utilidad.

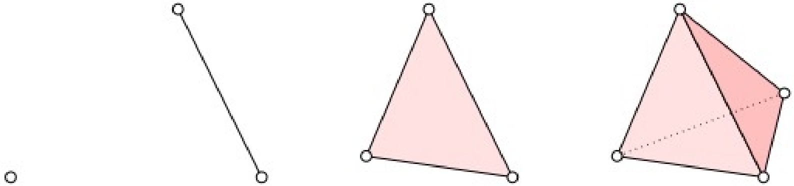
Definición

El ***simplex estándar*** *o n-****simplex*** Δ^n *, es el subconjunto de* $\mathbb{R}^{n+1}$ *definido por*

$$\Delta^n = \{(t_0, \ldots, t_n) \in \mathbb{R}^{n+1} : \sum_{i=0}^{n} t_i = 1 \text{ y } t_i \geq 0, \ \forall i\}.$$



2-simplex $\Delta^2 \subset \mathbb{R}^3$.



Simplejos estándar Δ^n, para $n = 0, 1, 2, 3$.

UVG UNIVERSIDAD DEL VALLE DE GUATEMALA

Simplejos

- Los vértices del n-simplex estándar son lo puntos $\mathbf{e}_0, \mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n \in \mathbb{R}^{n+1}$,

$$\mathbf{e}_0 = (1, 0, 0, \ldots, 0), \quad \mathbf{e}_1 = (0, 1, 0, \ldots, 0), \quad \ldots, \quad \mathbf{e}_n = (0, 0, 0, \ldots, 1).$$

- Denotamos al n-simplex Δ^n por $[\mathbf{e}_0, \mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n]$.
- Un conjunto de puntos $\mathbf{v}_0, \mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n \in \mathbb{R}^{n+1}$ (con $\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_0, \mathbf{v}_2 - \mathbf{v}_0, \ldots, \mathbf{v}_n - \mathbf{v}_0$ l.i.), define un n-simplex arbitrario $\sigma = [\mathbf{v}_0, \mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n] \subset \mathbb{R}^{n+1}$ por mediante el mapa

$$\sigma = [\mathbf{v}_0, \mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n] = \{\mathbf{x} = \sum_{i=0}^{n} t_i \mathbf{v}_i \in \mathbb{R}^{n+1} : \sum_{i=0}^{n} t_i = 1 \text{ y } t_i \geq 0, \ \forall i\}.$$

- Hay un homeomorfismo natural de Δ^n a $[\mathbf{v}_0, \mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n]$, dado por

$$\sum_{i=0}^{n} t_i \mathbf{e}_i \longrightarrow \sum_{i=0}^{n} t_i \mathbf{v}_i.$$

Definición

Sea $\sigma = [\mathbf{v}_0, \mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n]$ un n-simplex en $\mathbb{R}^p$.
*Cualquier m-simplex, $0 \leq m < n$, formado de los vértices de σ, es llamado una m-**cara** de σ. En particular, los 0-caras son los **vértices** de σ; las 1-caras son las **aristas** de σ; y las $(n-1)$-caras son las **caras** (faces) de σ.*

*En particular, la i-**ésima cara** de σ es $\sigma_i = [\mathbf{v}_0, \ldots, \mathbf{v}_{i-1}, \mathbf{v}_{i+1}, \ldots, \mathbf{v}_n]$.*

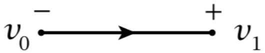
Definición

*Decimos que un n-simplex $\sigma = [\mathbf{v}_0, \mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n]$ tiene una **orientación positiva** si $\det[\mathbf{v}_0, \mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n] > 0$. El **borde** (con signo) de σ se define como*

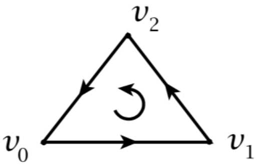
$$\partial\sigma = \sum_{i=0}^{n} (-1)^i \, \sigma_i = \sum_{i=0}^{n} (-1)^i \, [\mathbf{v}_0, \ldots, \mathbf{v}_{i-1}, \mathbf{v}_{i+1}, \ldots, \mathbf{v}_n].$$

UVG UNIVERSIDAD DEL VALLE DE GUATEMALA

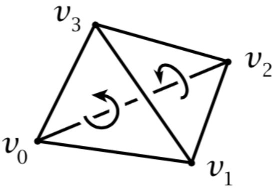
Simplejos



$$\partial[v_0, v_1] = [v_1] - [v_0]$$



$$\partial[v_0, v_1, v_2] = [v_1, v_2] - [v_0, v_2] + [v_0, v_1]$$

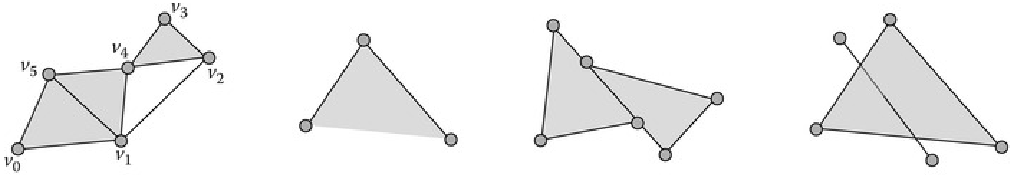


$$\begin{aligned}\partial[v_0, v_1, v_2, v_3] &= [v_1, v_2, v_3] - [v_0, v_2, v_3] \\ &\quad + [v_0, v_1, v_3] - [v_0, v_1, v_2]\end{aligned}$$

Definición

*Un **complejo simplicial** es un conjunto finito de simplejos $\mathcal{K}$ de $\mathbb{R}^n$, que cumple las dos condiciones siguientes:*

- *Si un n-simplex σ pertenece a $\mathcal{K}$ entonces todas sus m-caras pertenecen a $\mathcal{K}$, para $0 \leq m \leq n$.*
- *Si dos simplejos σ, τ de $\mathcal{K}$ se cortan, entonces su intersección $\sigma \cap \tau$ es una cara común.*

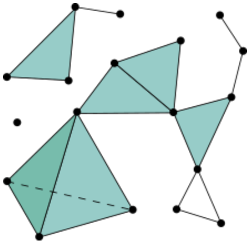


(a) A simplicial complex (b) Missing edge (c) Shared partial edge (d) Nonface intersection

Definición

*La **dimensión** de un n-simplex σ es $\dim \sigma = n$. La dimensión de un complejo simplicial $\mathcal{K}$ se define por*

$$\dim \mathcal{K} = \max\{\dim \sigma : \sigma \in \mathcal{K},\ \sigma \text{ es simplex}\}.$$



Los complejos simpliciales pueden ser estructuras muy complicadas. Nos interesa aquí sólo los complejos de dimension ≤ 2.

Obs! Si $S \subseteq \mathbb{R}^3$ es una superficie, nos interesan las imágenes de complejos simpliciales en $U \subseteq \mathbb{R}^2$, bajo la parametrización $\mathbf{x} : U \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$.

Definición

*Una **triangulación** de un espacio topológico X es un complejo simplicial $\mathcal{K}$ homeomorfo a X, junto con un homeomorfismo $h : \mathcal{K} \to X$.*

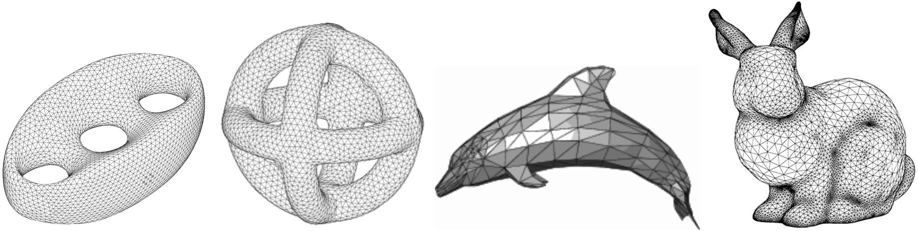
Obs! Típicamente, los elementos de esta triangulación son simplejos de la misma dimension $\dim X$.

En el caso de superficies

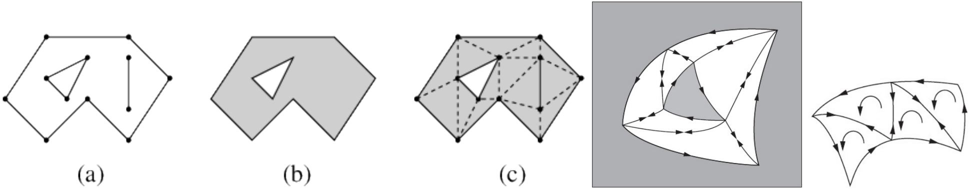
Definición

*Una región regular simple R sobre una superficie $S \subset \mathbb{R}^3$ es un **triángulo** si ∂R posee tres vértices (esto es, si R es la imagen parametrizada de un 2-simplex). En ese caso, una triangulación de R es un complejo simplicial $\mathcal{K}$ formado por una colección (finita) de triángulos y sus caras, de forma que $\mathcal{K}$ es homeomorfo a R.*

UVG UNIVERSIDAD DEL VALLE DE GUATEMALA



Ejemplos de triangulaciones para algunas superficies.



Triangulaciones para una región regular R.