Superficies en el espacio de Minkowski

Alan Reyes-Figueroa

Geometría Diferencial (Aula 26) 27.abril.2023

El espacio de Minkowski

Recordemos el espacio de Minkowski $\mathbb{R}^3_1 = \mathbb{R}^3$, equipado con el producto interno

$$\mathbf{x} \cdot \mathbf{y} = -x_1 y_1 + x_2 y_2 + x_3 y_3,$$

es llamado el **espacio de Minkowski** o **espacio de Lorentz** $\mathbb{R}^3_1$.

El caso general $\mathbb{R}^n_1$ se define de forma análoga como $\mathbb{R}^n$ con

$$\mathbf{x} \cdot \mathbf{y} = -x_1 y_1 + \sum_{i=2}^{n} x_i y_i,$$

y más general aún $\mathbb{R}^n_k$, $1 \leq k \leq n$, se define como $\mathbb{R}^n$ con el producto

$$\mathbf{x} \cdot \mathbf{y} = -\sum_{i=1}^{k} x_i y_i + \sum_{j=k+1}^{n} x_j y_j.$$

El espacio de Minkowski

En $\mathbb{R}^3_1$, el producto interno está dado por

$$\mathbf{x} \cdot \mathbf{y} = \mathbf{x}^T \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \mathbf{y}.$$

(esta matriz no es semi-definida positiva, tiene un autovalor -1).

Recordemos también que

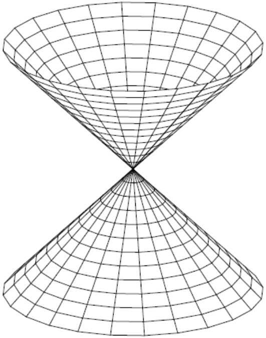
Definición

En el espacio de Minkowski $\mathbb{R}^3_1$, un vector $\mathbf{x}$ se llama

- ***de tipo espacial*** *(space-like), si $\mathbf{x} \cdot \mathbf{x} > 0$;*
- ***de tipo temporal*** *(time-like), si $\mathbf{x} \cdot \mathbf{x} < 0$;*
- ***de tipo luz*** *(light-like) o* ***isotrópico****, si $\mathbf{x} \cdot \mathbf{x} = 0$, pero $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$.*

El espacio de Minkowski

El conjunto de todos los vectores $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n_1$, $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$, tales que $|\mathbf{x}| = 0$, se llama el **cono de luz**.



El cono de luz en $\mathbb{R}^3_1$.

Superficies en el espacio de Minkowski

Un elemento de superficie S se describe por una parametrización $\mathbf{x} : U \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3_1$. Como existen diferentes tipos de vectores en $\mathbb{R}^3_1$, ahora tendremos diferentes tipos de planos, en particular, de planos tangente.

La diferencia principal ahora es que la primera forma fundamental $I_\mathbf{p}$ de S, ya no es necesariamente positiva-definida, ni siquiera es de rango máximo.
Al menos, se puede mostrar que $\operatorname{rank} I_\mathbf{p} > 0$, ya que no puede haber un subespacio 2-dimensional en $\mathbb{R}^3_1$ que consista únicamente de vectores isotrópicos. El rango, sin embargo, puede ser 1.

Esto conduce a la siguiente clasificación de superficies en $\mathbb{R}^3_1$:

Definición

Un elemento de superficie S, con parametrización $\mathbf{x} : U \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3_1$ es

- ***de tipo espacial** (space-like), si $I_{\mathbf{p}} \succ 0$ es positiva definida;*
- ***de tipo temporal** (time-like), si $I_{\mathbf{p}}$ es indefinida (tiene un autovalor positivo y otro negativo);*
- ***de tipo luz** (light-like) o **isotrópico**, si $\operatorname{rank} I_{\mathbf{p}} = 1$.*

Ejemplo 1:

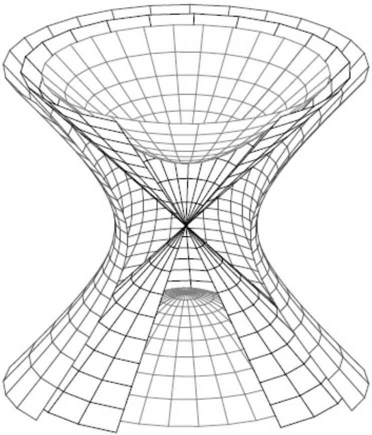
El hiperboloide de dos hojas $x_1^2 = x_2^2 + x_3^2 + 1$ es una superficie en la que todo punto es de tipo espacial.
Geométricamente, este hiperboloide se obtiene al rotar la hipérbola espacial $x_1^2 = x_2^2 + 1$, $x_3 = 0$, parametrizada por $c(t) = (\cosh t, \sinh t, 0)$, alrededor del eje Ox_1.
(Ver el Ejemplo 1 en el aula 05.)

Ejemplo 2:

El hiperboloide de una hoja $x_1^2 = x_2^2 + x_3^2 - 1$ es una superficie en la que todo punto es de tipo temporal.
Geométricamente, este hiperboloide se obtiene al rotar la hipérbola espacial $x_1^2 = x_2^2 - 1$, $x_3 = 0$, parametrizada por $c(t) = (\sinh t, \cosh t, 0)$.
(Ver el Ejemplo 2 en el aula 05.)

Ejemplo 3:

El cono de luz $x_1^2 = x_2^2 + x_3^2$ es en sí misma una superficie isotrópica, excepto por el origen, el cual está excluído para mantener la regularidad (ninguna abierto U de $\mathbb{R}^2$ puede parametrizar una vecindad del origen).



El cono de luz junto con los hiperboloides de una hoja y de dos hojas.

Lema

Una superficie S en $\mathbb{R}^3_1$ es de tipo (espacial, temporal, isotrópico) si, sólo si, para todo punto $\mathbf{p} \in S$ existe un vector normal $N(\mathbf{p})$ que es de tipo (espacial, temporal, isotrópico).
Obs! *Aquí $N \perp T_{\mathbf{p}}S$ implica que $N \cdot \mathbf{v} = 0$ en el producto de Minkowski, para todo $\mathbf{v} \in T_p pS$.*

Prueba: Primero comenzamos con un plano tangente $T_{\mathbf{p}}S$ y buscamos el vector $N(\mathbf{p})$. En el primer caso de un plano tangente espacial, elegimos $N(\mathbf{p})$ ortonormal a la base $\{\mathbf{x}_u, \mathbf{x}_v\}$ (*e.g.* $N(\mathbf{p})$ puede construirse completando a una base de $\mathbb{R}^3$ y usando el proceso de Gram-Schmidt).

De ahí, $N(\mathbf{p}) \perp T_{\mathbf{p}}S$. Pero entonces $N(\mathbf{p})$ es de tipo temporal, ya que de lo contrario el producto interior en $\mathbb{R}^3_1$ sería semi-definido positivo.

Procedemos de manera similar en el segundo caso. Aquí elegimos $\{\mathbf{x}_u, \mathbf{x}_v\}$ de modo que $\mathbf{x}_u$ sea espacial, y $\mathbf{x}_v$ temporal. Esto implica que $N(\mathbf{p})$ ahora sería un vector espacial, ya que de lo contrario el producto interno en $\mathbb{R}^3_1$ no seria positivo definido.

En el último caso elegimos $\{\mathbf{x}_u, \mathbf{x}_v\}$ de modo que $\mathbf{x}_u$ es isotrópico y $\mathbf{x}_v$ es espacial o temporal, pero ortogonal a $\mathbf{x}_u$. De ahí que podemos hacer $(\mathbf{p}) = \mathbf{x}_u$.

Recíprocamente, el complemento ortogonal de un vector espacial es un plano temporal, y que el complemento ortogonal de un vector temporal es un plano espacial. Para el caso isotrópico, dado $N(\mathbf{p})$ no hay complemento ortogonal en el sentido clásico, (el vector es perpendicular a sí mismo), pero sí hay un plano que es perpendicular a $N(\mathbf{p})$, entonces también contiene $N(\mathbf{p})$ y, por lo tanto, es necesariamente isotrópico. $\square$

Corolario

Toda superficie espacial S admite un campo normal unitario N, que es de tipo temporal, y toda superficie temporal S admite un campo normal unitario N, que es de tipo espacial. Una superficie isotrópica S admite un único espacio normal 1-dimensional, pero este está contenido en un espacio tangente. (En este sentido, el espacio tangente y el espacio normal juntos no general al espacio ambiente $\mathbb{R}^3_1$).

Ejemplo:

En los ejemplos 1 y 2 anteriores, el hiperboloide de dos hojas es de tipo espacial, ya que su campo normal unitario es de tipo temporal. De manera similar, el hiperboloide de una hoja es de tipo temporal, porque su campo normal unitario es espacial.

Superficies en el espacio de Minkowski

En el caso del cono de luz, vemos que cada vector posición de un punto $\mathbf{p}$ del cono es en sí mismo un vector normal, que está claramente contenido en el plano tangente. Observe la similitud con la esfera unitaria S^2, para la cual también los vectores a los puntos de la esfera definen el campo normal $N(\mathbf{p})$.

Para una superficie $S \subset \mathbb{R}^3_1$, que es de tipo espacial o temporal, existe un campo normal unitario N, que es único (a menos de signo).

Al igual que en la teoría de superficies en $\mathbb{R}^3$, este campo normal puede utilizarse para definir el mapa de Gauss. Más precisamente

Definición

*El **mapa de Gauss** es un mapa de la forma*

$$N : U \to S^2(1) = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3_1 : \; -x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1\},$$

en caso de que la superficie sea de tipo temporal, y

$$N : U \to S^2(-1) = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3_1 : \; -x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = -1\},$$

en caso de que la superficie sea de tipo espacial.

*En ese caso, definimos el **mapa de Weingarten** como $L = -DN$.*

UNIVERSIDAD DEL VALLE DE GUATEMALA

Ecuaciones de Frenet

Al igual que en el caso euclideano, definimos la **primera forma fundamental** I en coordenadas locales como

$$I_{\mathbf{p}}(\mathbf{v}) = \mathbf{v}^T \left(g_{ij}\right) \mathbf{v},$$

donde $g_{ij} = \langle \mathbf{x}_i, \mathbf{x}_j \rangle$.

La segunda forma fundamental II se define en coordenadas locales como

$$II_{\mathbf{p}}(\mathbf{v}) = \mathbf{v}^T \left(h_{ij}\right) \mathbf{v},$$

donde $h_{ij} = \varepsilon \langle \mathbf{x}_{ij}, N \rangle$.
Aquí, $\varepsilon = \langle N, N \rangle$ es el signo definido para el campo normal unitario.

Si $\varepsilon_i = \langle \mathbf{x}_i, \mathbf{x}_i \rangle$, la curvatura de Gauss de la superficie S es entonces

$$K = \frac{eg - f^2}{EG - F^2} = \frac{\det(h_{ij})}{\det(g_{ij})} \varepsilon_1 \varepsilon_2.$$

Ecuaciones de Frenet

Similarmente, la curvatura media es

$$H = \frac{1}{2}(\varepsilon_1\kappa_1 + \varepsilon_2\kappa_2).$$

La prueba es similar al caso del Teorema de existencia y unicidad de curvas en el caso euclideano $\mathbb{R}^n$.

El único cambio es la modificación en la representación de un vector en términos de la base ortonormal dada por el referencial de Frenet:

$$\mathbf{e}_i' = \sum_{j=1}^{n} \epsilon_j \langle \mathbf{e}_i', \mathbf{e}_j, \rangle \mathbf{e}_j, \quad i = 1, 2, \ldots, n.$$