La Segunda Forma Fundamental en coordenadas locales

Alan Reyes-Figueroa

Geometría Diferencial (Aula 22) 18.abril.2023

Coordenadas locales

Ya hemos visto que la primera forma fundamental $I_{\mathbf{p}}$, en coordenadas locales se escribe como

$$I_{\mathbf{p}} = \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix} = (g_{ij}) \,,$$

donde $g_{ij} = \langle \mathbf{x}_i, \mathbf{x}_j \rangle$.

¿Cómo expresamos la segunda y tercera forma fundamentales en coordenadas locales?

Recordemos que si $\mathbf{x} : U \subseteq \mathbb{R}^2 \to V \cap S$ es una parametrización de una superficie orientable S, entonces

$$N(\mathbf{p}) = \frac{\mathbf{x}_u \times \mathbf{x}_v}{|\mathbf{x}_u \times \mathbf{x}_v|}.$$

Coordenadas locales

Sea $\alpha : (-\varepsilon, \varepsilon) \to \mathbb{R}$, con $\alpha(t) = \mathbf{x}(u(t), v(t))$ una curva parametrizada en S, con $\alpha(0) = \mathbf{p}$, $\alpha'(0) = \mathbf{v}$.
El vector tangente a α en $\mathbf{p}$ es

$$\mathbf{v} = \alpha'(t)\big|_{t=0} = \mathbf{x}_u(\mathbf{p})u'(0) + \mathbf{x}_v(\mathbf{p})v'(0),$$

y

$$DN(\mathbf{p}) \cdot \mathbf{v} = (N \circ \alpha)'(t)\big|_{t=0} = DN \cdot (u', v')\big|_{t=0} = N_u(\mathbf{p})u'(0) + N_v(\mathbf{p})v'(0).$$

Como $N_u, N_v \in T_{\mathbf{p}}S$, podemos escribirlos en términos de la base canónica $\{\mathbf{x}_u, \mathbf{x}_v\}$:

$$\begin{aligned} N_u &= a_{11}\mathbf{x}_u + a_{21}\mathbf{x}_v, \\ N_v &= a_{12}\mathbf{x}_u + a_{22}\mathbf{x}_v. \end{aligned}$$

Coordenadas locales

De ahí,

$$\begin{aligned} DN(\mathbf{p}) \cdot \mathbf{v} &= (a_{11}\mathbf{x}_u + a_{21}\mathbf{x}_v)u' + (a_{12}\mathbf{x}_u + a_{22}\mathbf{x}_v)v' \\ &= (a_{11}u' + a_{12}v')\mathbf{x}_u + (a_{21}u' + a_{22}v')\mathbf{x}_v. \end{aligned}$$

En notación matricial

$$DN(\mathbf{p}) \cdot \begin{pmatrix} u' \\ v' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u' \\ v' \end{pmatrix}.$$

Esto es, en la base $\{\mathbf{x}_u, \mathbf{x}_v\}$ de $T_{\mathbf{p}}S$, $DN(\mathbf{p})$ se representa por

$$DN = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$$

Coordenadas locales

Por otro lado, la expresión de la segunda forma fundamental es

$$\begin{aligned} II_{\mathbf{p}}(\mathbf{v}) &= -\langle DN(\mathbf{p})\cdot\mathbf{v},\mathbf{v}\rangle = -\langle N_u u' + N_v v', \mathbf{x}_u u' + \mathbf{x}_v v'\rangle \\ &= -\langle N_u,\mathbf{x}_u\rangle (u')^2 - \big(\langle N_u,\mathbf{x}_v\rangle + \langle N_v,\mathbf{x}_u\rangle\big) u'v' - \langle N_v,\mathbf{x}_v\rangle (v')^2 \\ &= e(u')^2 + 2fu'v' + g(v')^2. \end{aligned}$$

Como $\langle N,\mathbf{x}_u\rangle = 0$ y $\langle N,\mathbf{x}_v\rangle = 0$, entonces

$$\begin{aligned} \langle N_u,\mathbf{x}_u\rangle + \langle N,\mathbf{x}_{uu}\rangle &= 0, & \langle N_u,\mathbf{x}_v\rangle + \langle N,\mathbf{x}_{uv}\rangle &= 0, \\ \langle N_v,\mathbf{x}_u\rangle + \langle N,\mathbf{x}_{vu}\rangle &= 0, & \langle N_v,\mathbf{x}_v\rangle + \langle N,\mathbf{x}_{vv}\rangle &= 0. \end{aligned}$$

Luego, $II_{\mathbf{p}}(\mathbf{v}) = e(u')^2 + 2fu'v' + g(v')^2$, donde

Coordenadas locales

$$\begin{aligned} e &= -\langle N_u, \mathbf{x}_u \rangle = \langle N, \mathbf{x}_{uu} \rangle, \\ 2f &= -\langle N_u, \mathbf{x}_v \rangle - \langle N_v, \mathbf{x}_u \rangle = \langle N, \mathbf{x}_{uv} \rangle + \langle N, \mathbf{x}_{vu} \rangle = 2\langle N, \mathbf{x}_{uv} \rangle, \\ g &= -\langle N_v, \mathbf{x}_v \rangle = \langle N, \mathbf{x}_{vv} \rangle. \end{aligned}$$

En otras palabras,

$$II_{\mathbf{p}}(\mathbf{v}) = \mathbf{v}^T \begin{pmatrix} e & f \\ f & g \end{pmatrix} \mathbf{v} \implies II_{\mathbf{p}} = \begin{pmatrix} e & f \\ f & g \end{pmatrix} = (h_{ij}),$$

donde $h_{ij} = \langle N, \mathbf{x}_{ij} \rangle$.

Los coeficientes e, f, g se llaman los *coeficientes de la segunda forma fundamental*.

Coordenadas locales

Como

$$N_u = a_{11}\mathbf{x}_u + a_{21}\mathbf{x}_v \quad \text{y} \quad N_v = a_{12}\mathbf{x}_u + a_{22}\mathbf{x}_v,$$

$$E = \langle \mathbf{x}_u, \mathbf{x}_u \rangle, \quad F = \langle \mathbf{x}_u, \mathbf{x}_v \rangle, \quad G = \langle \mathbf{x}_v, \mathbf{x}_v \rangle,$$

podemos escribir

$$\begin{aligned} -e &= \langle N_u, \mathbf{x}_u \rangle = a_{11}E + a_{21}F, & \qquad -f &= \langle N_u, \mathbf{x}_v \rangle = a_{11}F + a_{21}G, \\ -f &= \langle N_v, \mathbf{x}_u \rangle = a_{12}E + a_{22}F, & \qquad -g &= \langle N_v, \mathbf{x}_v \rangle = a_{12}F + a_{22}G. \end{aligned}$$

En forma matricial, este sistema se escribe como

$$-\begin{pmatrix} e & f \\ f & g \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix},$$

Coordenadas locales

Portanto,

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} e & f \\ f & g \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix}^{-1} = -\frac{1}{EG - F^2} \begin{pmatrix} e & f \\ f & g \end{pmatrix} \begin{pmatrix} G & -F \\ -F & E \end{pmatrix}.$$

Así, obtenemos las **ecuaciones de Weingarten**

$$a_{11} = \frac{fF - eG}{EG - F^2}, \quad a_{12} = \frac{gF - fG}{EG - F^2}, \quad a_{21} = \frac{eF - fE}{EG - F^2}, \quad a_{22} = \frac{fF - gE}{EG - F^2},$$

o equivalentemente

$$DN(\mathbf{p}) = -\frac{1}{EG - F^2} \begin{pmatrix} e & f \\ f & g \end{pmatrix} \begin{pmatrix} G & -F \\ -F & E \end{pmatrix} = -II_{\mathbf{p}} \cdot I_{\mathbf{p}}^{-1}.$$

Teorema

En coordenadas locales, las curvaturas media y gaussiana son

$$H = \frac{1}{2}\Big(\frac{eG - 2fF + gE}{EG - F^2}\Big), \qquad K = \frac{eg - f^2}{EG - F^2}.$$

<u>Prueba</u>: Basta recordar que

$$H = \frac{1}{2}(\kappa_1 + \kappa_2) = -\frac{1}{2}\,\mathrm{tr}\; DN(\mathbf{p}) = -\frac{1}{2}\Big(\frac{fF - eG}{EG - F^2} + \frac{fF - gE}{EG - F^2}\Big) = \frac{1}{2}\Big(\frac{eG - 2fF + gE}{EG - F^2}\Big);$$

y

$$\begin{aligned} K &= \kappa_1\kappa_2 = \det\; DN(\mathbf{p}) = \Big(\frac{fF - eG}{EG - F^2}\Big)\Big(\frac{fF - gE}{EG - F^2}\Big) - \Big(\frac{eF - fE}{EG - F^2}\Big)\Big(\frac{gF - fG}{EG - F^2}\Big) \\ &= \frac{(EG - F^2)(eg - f^2)}{(EG - F^2)^2} = \frac{fF - eG}{EG - F^2}. \ \square \end{aligned}$$

Ejemplos

Ejemplo 1: (Plano)
Tomamos la parametrización

$$\mathbf{x}(u, v) = \mathbf{p}_0 + u\mathbf{w}_1 + v\mathbf{w}_2, \quad \text{con } \mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2 \text{ base ortonormal de } S.$$

Luego, $\mathbf{x}_u = \mathbf{w}_1$, $\mathbf{x}_v = \mathbf{w}_2$, y

$$E = \langle \mathbf{x}_u, \mathbf{x}_u \rangle = 1, \quad F = \langle \mathbf{x}_u, \mathbf{x}_v \rangle = 0, \quad G = \langle \mathbf{x}_v, \mathbf{x}_v \rangle = 1.$$

Vimos también que N es constante $\Rightarrow$ $DN(\mathbf{p}) = 0$, luego $N_u = N_v = 0$.

Así,

$$e = -\langle N_u, \mathbf{x}_u \rangle = 0, \quad f = -\langle N_u, \mathbf{x}_v \rangle = 0, \quad g = -\langle N_v, \mathbf{x}_v \rangle = 0.$$

Ejemplos

En particular,

$$II_{\mathbf{p}} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \forall \mathbf{p} \in S,$$

y

$$H = \frac{1}{2}\Big(\frac{eG - 2fF + gE}{EG - F^2}\Big) = 0, \quad K = \frac{eg - f^2}{EG - F^2} = 0.$$

Ejemplos

Ejemplo 2: (Esfera de radio R)
Tomamos la parametrización

$$\mathbf{x}(u,v) = (R\sin v\cos u, R\sin v\sin u, R\cos v), \quad u \in (0,2\pi),\ v \in (-\tfrac{\pi}{2}, \tfrac{\pi}{2}).$$

Luego,

$$\mathbf{x}_u = (-R\sin v\sin u, R\sin v\cos u, 0), \ \ \mathbf{x}_v = (R\cos v\cos u, R\cos v\sin u, -R\sin v).$$

Así

$$E = \langle \mathbf{x}_u, \mathbf{x}_u \rangle = R^2\cos^2 v, \quad F = \langle \mathbf{x}_u, \mathbf{x}_v \rangle = 0, \quad G = \langle \mathbf{x}_v, \mathbf{x}_v \rangle = R^2.$$

Además,

$$\begin{aligned}
\mathbf{x}_{uu} &= (-R\sin v\cos u, -R\sin v\sin u, 0),\\
\mathbf{x}_{uv} &= (-R\cos v\sin u, R\cos v\cos u, 0),\\
\mathbf{x}_{vv} &= (-R\sin v\cos u, -R\sin v\sin u, -R\cos v).
\end{aligned}$$

Ejemplos

Vimos también que $N(\mathbf{p}) = \pm\frac{1}{R}\mathbf{p}$, de modo que

$$N = -\tfrac{1}{R}\mathbf{p} = -\tfrac{1}{R}\mathbf{x}(u,v) = (-\sin v\cos u, -\sin v\sin u, -\cos v).$$

Así,

$$\begin{aligned}
e &= \langle N, \mathbf{x}_{uu}\rangle = R\sin^2 v(\cos^2 u + \sin^2 u) = R\sin^2 v,\\
f &= \langle N, \mathbf{x}_{uv}\rangle = R\cos u\cos v\sin u\sin v - R\cos u\cos v\sin u\sin v = 0,\\
g &= \langle N, \mathbf{x}_{vv}\rangle = R\sin^2 v(\cos^2 u + \sin^2 u) + R\cos^2 v = R.
\end{aligned}$$

$\Rightarrow II_{\mathbf{p}} = \left(\begin{smallmatrix} R\sin^2 v & 0 \\ 0 & R\end{smallmatrix}\right)$,

Finalmente,

$$\begin{aligned}
H &= \frac{1}{2}\left(\frac{eG - 2fF + gE}{EG - F^2}\right) = \frac{eG + gE}{2EG} = \frac{R^3\sin^2 v + R^3\sin^2 v}{2R^4\sin^2 v} = \frac{2R^3\sin^2 v}{2R^4\sin^2 v} = \frac{1}{R},\\
K &= \frac{eg - f^2}{EG - F^2} = \frac{eg}{EG} = \frac{R^2\sin^2 v}{R^4\sin^2 v} = \frac{1}{R^2}.
\end{aligned}$$

Ejemplos

Podemos calcular también las curvaturas principales. De la ecuación de Weingartem, como $DN(\mathbf{p}) = -II_{\mathbf{p}} \cdot I_{\mathbf{p}}^{-1}$, tenemos

$$\begin{aligned}
DN(\mathbf{p}) &= -\begin{pmatrix} R\sin^2 v & 0 \\ 0 & R \end{pmatrix} \begin{pmatrix} R^2\sin^2 v & 0 \\ 0 & R^2 \end{pmatrix}^{-1} \\
&= -\begin{pmatrix} R\sin^2 v & 0 \\ 0 & R \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{R^2\sin^2 v} & 0 \\ 0 & \frac{1}{R} \end{pmatrix} \\
&= -\begin{pmatrix} \frac{R\sin^2 v}{R^2\sin^2 v} & 0 \\ 0 & \frac{R}{R^2} \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} \frac{1}{R} & 0 \\ 0 & \frac{1}{R} \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

De ahí, las curvaturas principales son $\kappa_1 = \kappa_2 = \frac{1}{R}$.

Ejemplo 3: (Cilindro radio R)
Tomamos la parametrización

$$\mathbf{x}(u,v) = (R\cos u, R\sin u, v), \quad u \in (0, 2\pi),\ v \in \mathbb{R}.$$

Luego,

$$\mathbf{x}_u = (-R\sin u, R\cos u, 0), \quad \mathbf{x}_v = (0,0,1).$$

Así

$$E = \langle \mathbf{x}_u, \mathbf{x}_u \rangle = R^2, \quad F = \langle \mathbf{x}_u, \mathbf{x}_v \rangle = 0, \quad G = \langle \mathbf{x}_v, \mathbf{x}_v \rangle = 1.$$

Además,

$$\mathbf{x}_{uu} = (-R\cos u, -R\sin u, 0), \quad \mathbf{x}_{uv} = (0,0,0), \quad \mathbf{x}_{vv} = (0,0,0).$$

Por otro lado, vimos que

$$N = -\tfrac{1}{R}(R\cos u, R\sin u, 0) = (-\cos u, -\sin u, 0).$$

Ejemplos

Así,

$$
\begin{aligned}
e &= \langle N, \mathbf{x}_{uu} \rangle = R(\cos^2 u + \sin^2 u) = R, \\
f &= \langle N, \mathbf{x}_{uv} \rangle = \langle N, \mathbf{0} \rangle = 0, \\
g &= \langle N, \mathbf{x}_{vv} \rangle = \langle N, \mathbf{0} \rangle = 0.
\end{aligned}
$$

$$\Rightarrow II_{\mathbf{p}} = \begin{pmatrix} R & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

Finalmente,

$$
\begin{aligned}
H &= \frac{1}{2}\Big(\frac{eG - 2fF + gE}{EG - F^2}\Big) = \frac{eG}{2EG} = \frac{e}{2E} = \frac{R}{2R^2} = \frac{1}{2R}, \\
K &= \frac{eg - f^2}{EG - F^2} = \frac{eg}{EG} = \frac{R(0)}{R^2} = 0.
\end{aligned}
$$

Ejemplos

Ejemplo 4: (Toro $\mathbb{T}^2$)
Consideramos la parametrización

$$\mathbf{x}(u,v) = \big((R + r\cos v)\cos u, (R + r\cos v)\sin u, r\sin v\big), \quad u, v \in (0, 2\pi).$$

Luego,

$$\mathbf{x}_u = (R + r\cos v)(-\sin u, \cos u, 0), \;\; \mathbf{x}_v = (-r\sin v\cos u, -r\sin v\sin u, r\cos v).$$

Así

$$E = \langle \mathbf{x}_u, \mathbf{x}_u \rangle = (R + r\cos v)^2, \quad F = \langle \mathbf{x}_u, \mathbf{x}_v \rangle = 0, \quad G = \langle \mathbf{x}_v, \mathbf{x}_v \rangle = r^2.$$

Además,

$$\begin{aligned}
\mathbf{x}_{uu} &= (R + r\cos v)(-\cos u, -\sin u, 0), \\
\mathbf{x}_{uv} &= (r\sin v\sin u, -r\sin v\cos u, 0), \\
\mathbf{x}_{vv} &= (-r\cos v\cos u, -r\sin v\cos u, -r\sin v).
\end{aligned}$$

Ejemplos

Vimos también que $N(\mathbf{p}) = \pm\frac{\mathbf{x}_u \times \mathbf{x}_v}{|\mathbf{x}_u \times \mathbf{x}_v|}$, de modo que

$$N = (-\cos u \cos v, -\sin u \cos v, -\sin v).$$

Así,

$$\begin{aligned}
e &= \langle N, \mathbf{x}_{uu}\rangle = (R + r\cos v)(\cos^2 u \cos v + \sin^2 \cos v) = (R + r\cos v)\cos v,\\
f &= \langle N, \mathbf{x}_{uv}\rangle = (R + r\cos v)rR(\cos u \cos v \sin u \sin v - \cos u \cos v \sin u \sin v) = 0,\\
g &= \langle N, \mathbf{x}_{vv}\rangle = r(\cos^2 u \cos^2 v + \sin^2 u \cos^2 v + \sin^2 v) = r.
\end{aligned}$$

$\Rightarrow II_{\mathbf{p}} = \begin{pmatrix} (R+r\cos v)\cos v & 0 \\ 0 & r \end{pmatrix}$,
Finalmente,

$$\begin{aligned}
H &= \frac{1}{2}\left(\frac{eG - 2fF + gE}{EG - F^2}\right) = \frac{eG + gE}{2EG} = \frac{(R + r\cos v)r[r\cos v + (R + r\cos v)]}{2(R + r\cos v)^2 r^2} = \frac{R + 2r\cos v}{2r(R + r\cos v)},\\
K &= \frac{eg - f^2}{EG - F^2} = \frac{eg}{EG} = \frac{(R + r\cos v)r\cos v}{(R + r\cos v)^2 r^2} = \frac{\cos v}{r(R + r\cos v)}.
\end{aligned}$$

Ejercicio

Calcular la segunda forma fundamental, $DN(\mathbf{p})$, las curvaturas principales y las curvaturas K y H para el hiperboloide

$$S = \{(z, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \; z = y^2 - x^2\}.$$