Curvaturas en superficies

Alan Reyes-Figueroa
Geometría Diferencial

(Aula 21) 13.abril.2023

Curvaturas en superficies

En el aula anterior se introdujo la aplicación normal de Gauss

$$N(\mathbf{p}) = \frac{\mathbf{x}_u(\mathbf{q}) \times \mathbf{x}_v(\mathbf{q})}{|\mathbf{x}_u(\mathbf{q}) \times \mathbf{x}_v(\mathbf{q})|}, \quad \text{con } \mathbf{q} = \mathbf{x}^{-1}(\mathbf{p}),$$

y la segunda forma fundamental

$$II_{\mathbf{p}}(\mathbf{v}) = -\langle DN(\mathbf{p}) \cdot \mathbf{v}, \mathbf{v} \rangle, \quad \mathbf{v} \in T_{\mathbf{p}}S.$$

Vimos que la segunda forma fundamental, de alguna manera codifica la información de la curvatura de la superficie S en el punto $\mathbf{p}$:

Existe una base ortonormal $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2\}$ de $T_{\mathbf{p}}S$, en donde la segunda forma fundamental se escribe como

$$II_{\mathbf{p}} = \begin{pmatrix} -\kappa_1 & 0 \\ 0 & -\kappa_2 \end{pmatrix}$$

donde κ_1, κ_2 y $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2\}$ son las curvaturas y direcciones principales en $\mathbf{p}$.

En particular, recordemos que toda forma cuadrática (o más bien, toda aplicación lineal $T:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$) tiene dos invariantes importantes: su determinante y su traza.

Definición

*Sea $S \subseteq \mathbb{R}^3$ superficie regular, $\mathbf{p} \in S$. Sean κ_1 y κ_2 las curvaturas principales de S en $\mathbf{p}$. Definimos la **curvatura media** de S en $\mathbf{p}$ como*

$$H = \tfrac{1}{2}(\kappa_1 + \kappa_2) = -\tfrac{1}{2}\,\mathrm{tr}\; DN(\mathbf{p}).$$

*Definimos la **curvatura de Gauss** de S en $\mathbf{p}$ como*

$$K = \kappa_1\kappa_2 = \det\; DN(\mathbf{p}).$$

Curvaturas en superficies

Obs!

- Las curvaturas H y K determinan completamente la información de la curvatura.

Esto es porque la traza y el determinante determinan automáticamente los autovalores de una matriz 2×2: los autovalores λ_1 y λ_2 satisfacen

$$2H = \operatorname{tr} T = \lambda_1 + \lambda_2, \quad K = \det T = \lambda_1 \lambda_2.$$

En este caso, las curvaturas principales κ_1 y κ_2 son las raíces del polinomio

$$x^2 - (\operatorname{tr}\, DN(\mathbf{p}))x + \det DN(\mathbf{p}) = x^2 - 2Hx + K = 0.$$

Definición

Sea $S \subseteq \mathbb{R}^3$ una superficie regular. Un punto $\mathbf{p} \in S$ se llama

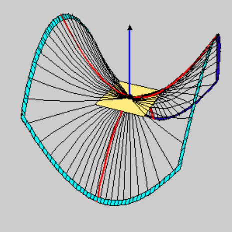
- ***elíptico**, si $K(\mathbf{p}) > 0$;*
- ***hiperbólico**, si $K(\mathbf{p}) < 0$;*
- ***parabolico**, si $K(\mathbf{p}) = 0$, pero $DN(\mathbf{p}) \neq 0$;*
- ***planar**, si $DN(\mathbf{p}) = 0$.*

Definición

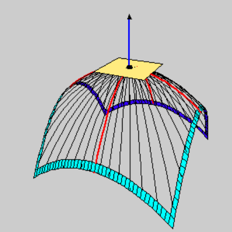
*Un punto $\mathbf{p} \in S$ tal que $\kappa_1(\mathbf{p}) = \kappa_2(\mathbf{p})$ se llama un **punto umbílico**.*

Obs!: Si todos los puntos de una superficie S son umbílicos, entonces S está contenida en un plano o una esfera.

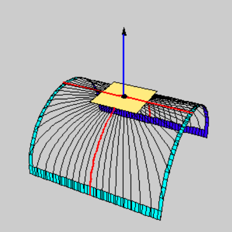
Curvaturas



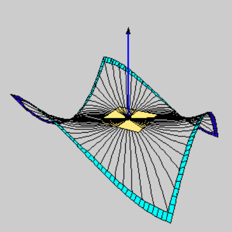
hiperbólico



elíptico



parabólico



planar

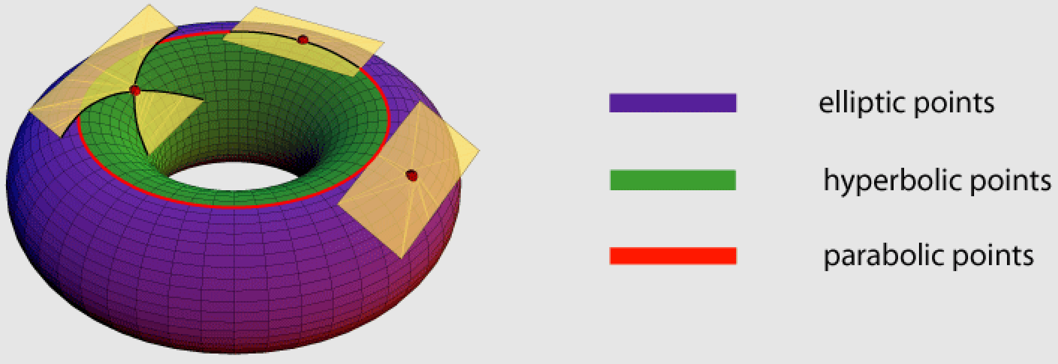
Curvaturas

Ejemplos:

- Todo punto de una esfera es elíptico.
- El origen de la superficie $x^2 - y^2 = z$ es hiperbólico.
- Todo punto del cilindro $S^1 \times \mathbb{R}$ es parabólico.
- en la superficie $z = x^4 + y^4$, el origen es planar.

Ejercicio para pensar:

¿En el toro, cuáles puntos son elípticos? ¿Cuáles son hiperbólicos? ¿Hay puntos parabólicos? ¿Y planares?



Clasificación de la curvatura en puntos del toro $\mathbb{T}^2$.

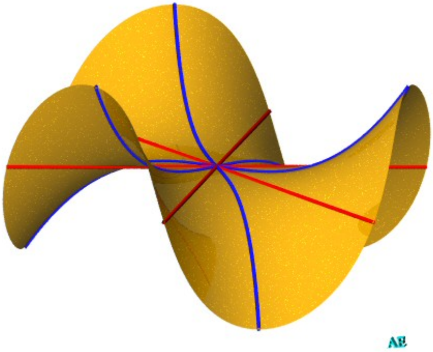
Definición

Sea $S \subseteq \mathbb{R}^3$ superficie regular, $\mathbf{p} \in S$. Una ***dirección asintótica*** *de S en $\mathbf{p}$ es una dirección $\mathbf{v} \in T_{\mathbf{p}}S$ para la cual la curvatura normal $\kappa(\mathbf{v}) = 0$.*

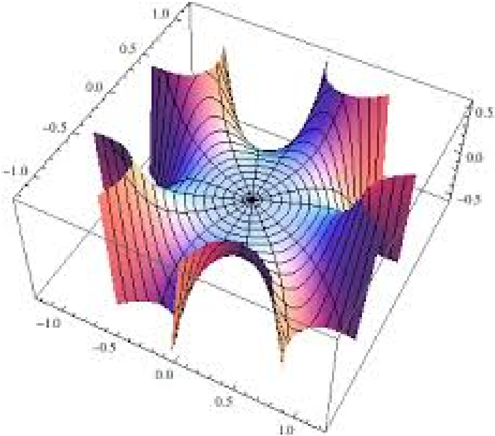
Una ***curva asintótica*** *de S es una curva regular conexa $\alpha(t) \subseteq S$, tal que para cada punto $\mathbf{p} = \alpha(t)$, el vector tangente $\alpha'(t)$ es una dirección asintótica.*

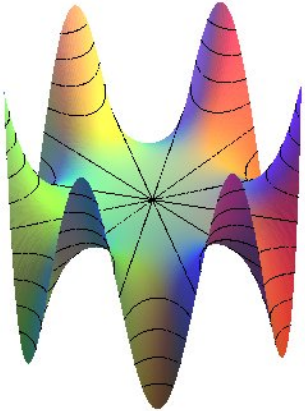
Definición

Una ***curva principal*** *de S es una curva regular conexa $\alpha(t) \subseteq S$, tal que para cada punto $\mathbf{p} = \alpha(t)$, el vector tangente $\alpha'(t)$ es una dirección principal.*



Direcciones asintóticas en un punto hiperbólico de S.





Otros ejemplos de direcciones asintóticas y puntos parabólicos.

Definición

Sea $\mathbf{p} \in S$. *La* ***indicatriz de Dupin*** *de* S *en* $\mathbf{p}$ *es el conjunto de vectores* $\mathbf{v}$ *en* $T_{\mathbf{p}}S$ *tales que* $II_{\mathbf{p}}(\mathbf{v}) = \pm 1$.

Tomemos $\mathbf{w} \in T_{\mathbf{p}}S$ $\mathbf{w} \neq \mathbf{0}$, y sea $\mathbf{v} = \frac{\mathbf{w}}{|\mathbf{w}|}$. Entonces, $\mathbf{w} = \rho\mathbf{v}$, donde $\mathbf{v} = \cos\varphi\,\mathbf{e}_1 + \sin\varphi\,\mathbf{e}_2$. Luego, la fórmula de Euler nos da

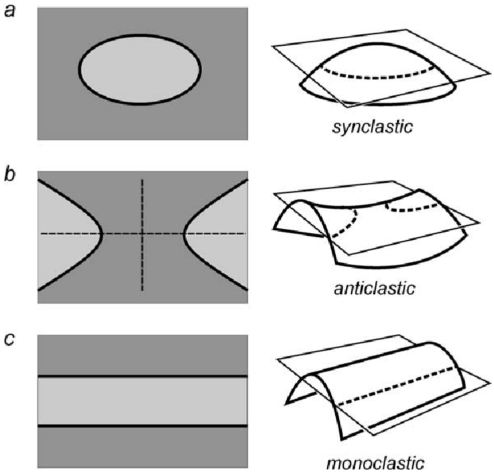
$$\pm 1 = II_{\mathbf{p}}(\mathbf{w}) = \rho^2 II_{\mathbf{p}}(\mathbf{v}) = \kappa_1\rho^2\cos^2\varphi + \kappa_2\rho^2\sin^2\varphi = \kappa_1\xi^2 + \kappa_2\zeta^2,$$

donde $\xi = \rho\cos\varphi$, $\zeta = \rho\sin\varphi$ y $\mathbf{w} = \xi\mathbf{e}_1 + \zeta\mathbf{e}_2$.

En el sistema coordenado (ξ, ζ) la indicatriz de Dupin se resume a

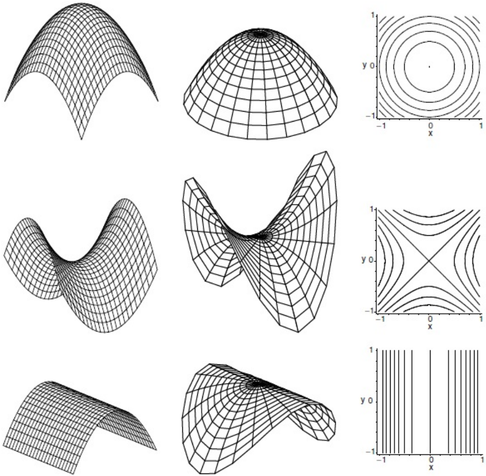
$$\kappa_1\xi^2 + \kappa_2\zeta^2 = \pm 1.$$

La indicatriz de Dupin



UNIVERSIDAD DEL VALLE DE GUATEMALA

La indicatriz de Dupin



La indicatriz de Dupin

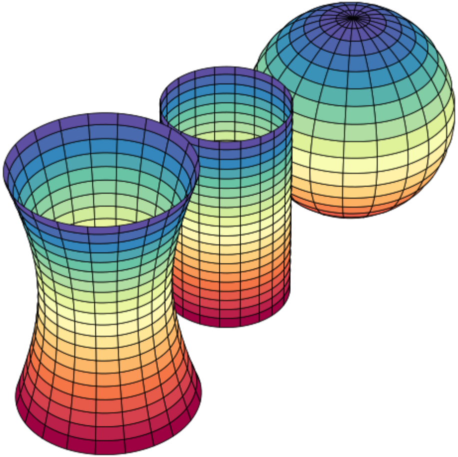
Importante!
Sabemos que localmente, toda superficie regular se comporta como la gráfica de alguna función $z = f(x, y) = g(\xi, \zeta)$.

En las coordenadas (ξ, ζ), la indicatriz de Dupin nos da el comportamiento local de esta superfice, en una vecindad del punto $\mathbf{p} \in S$ como origen.

De aquí la idea de una tríada de comportamientos: elíptico, parabólico o hiperbólico.

Pregunta: ¿Pueden dar ejemplos de superficies con curvatura gaussiana $K > 0$, $K = 0$, $K < 0$?
¿Y de curvatura media $H > 0$, $H = 0$, $H < 0$?

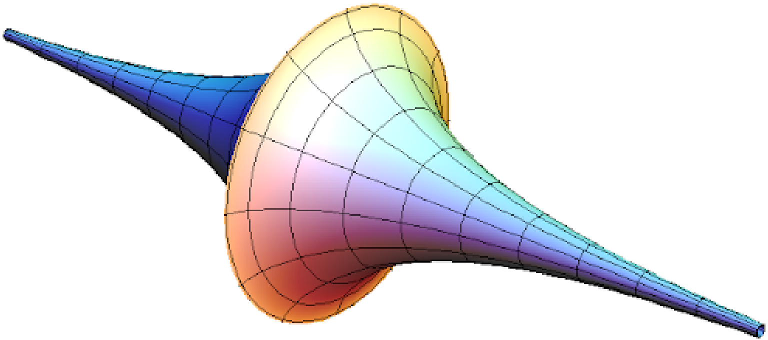
Superficies de curvatura constante



Algunas superficies con curvatura gaussiana: (a) $K < 0$, (b) $K = 0$, (c) $K > 0$.

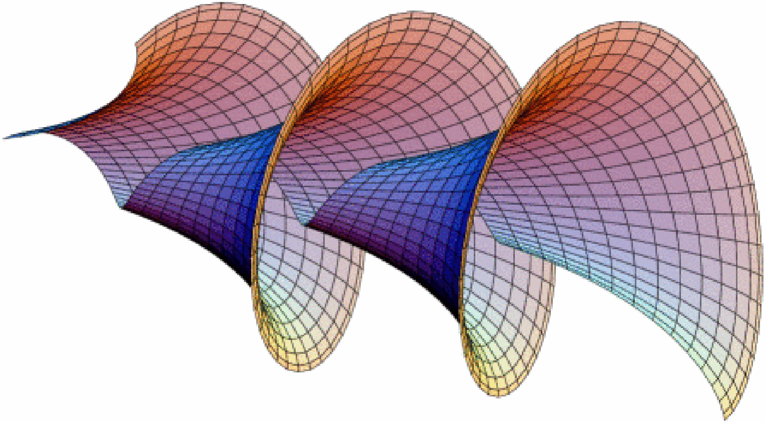
Superficies de curvatura constante

Pregunta: ¿Existen superficies de curvatura gaussiana K constante? ¿Y de curvatura media H constante?



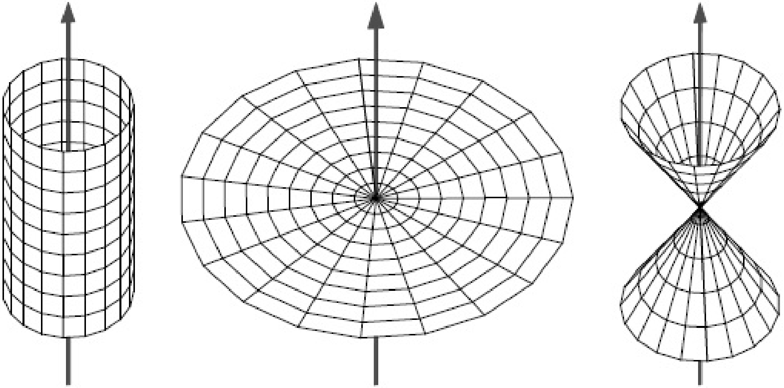
La pseudo-esfera (o tractroide) tiene curvatura constante $K = -1$.

Superficies de curvatura constante



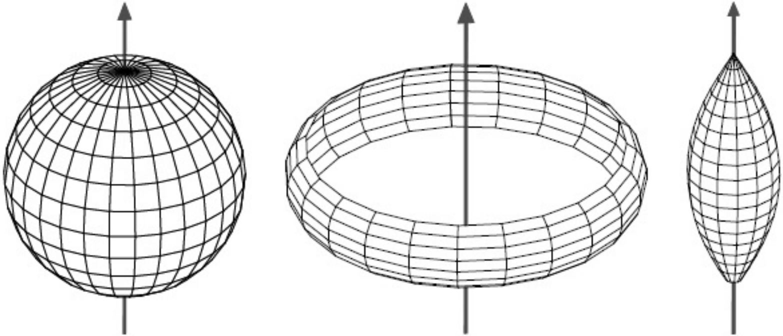
Una superficie de curvatura media constante $H < 0$.

Superficies de curvatura constante



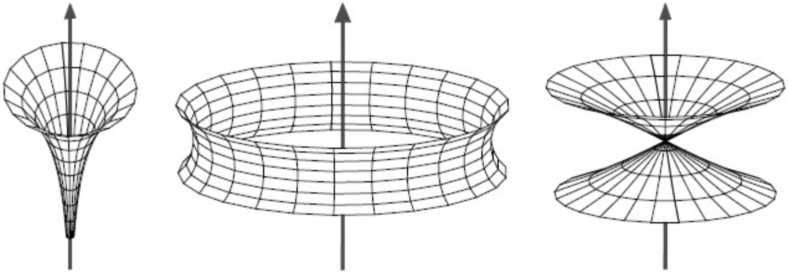
Ejemplos de superficies con curvatura gaussiana $K = 0$.

Superficies de curvatura constante



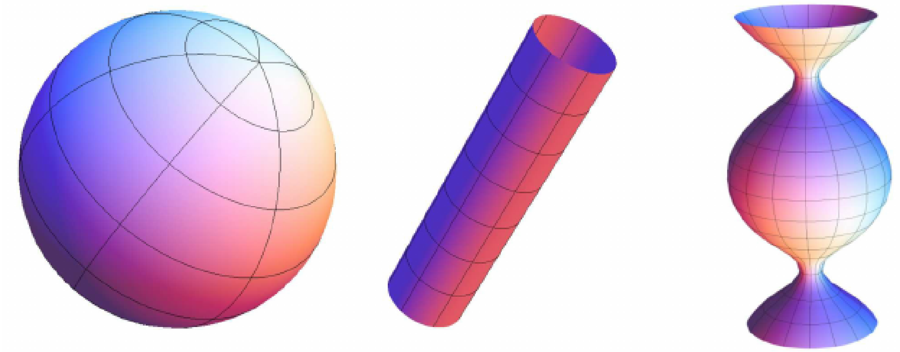
Ejemplos de superficies con curvatura gaussiana $K > 0$.

Superficies de curvatura constante



Ejemplos de superficies con curvatura gaussiana $K < 0$.

Superficies de curvatura constante



Ejemplos de superficies con curvatura media constante H: (a) la esfera, (b) el cilindro, (c) el unduloide.

Teorema

Sea $S \subset \mathbb{R}^3$ superficie regular orientable, y $\mathbf{x} : U \subseteq \mathbb{R}^2 \to V \cap S$ una parametrización, con mapa de Gauss $N(\mathbf{p}) : U \to S^2$.

i) *Para cada $\mathbf{p} \in U$, $DN(\mathbf{p}) : T_{\mathbf{p}}S \to T_{\mathbf{p}}S$ es un isomorfismo lineal.*
*El mapa $L = -DN$ se llama el **mapa de Weingarten** u **operador de forma** de $\mathbf{x}$.*

ii) *L es independiente de la parametrización $\mathbf{x}$ (a menos de cambio de orientación del campo normal unitario N), y es un operador auto-adjunto con respecto a la primera forma fundamental $I_{\mathbf{p}}$.*

Prueba:
(i) Se sigue simplemente de la relación $0 = \frac{\partial}{\partial u_i}\langle N, N\rangle = 2\langle \frac{\partial}{\partial u_i} N, N\rangle$. Por tanto, ambos vectores N_u, N_v son ortogonales a N. Que el mapa $DN(\mathbf{p})$ es un isomorfismo lineal se sigue del hecho que $D\mathbf{x}$ tiene rango máximo.
Para mostrar (ii), sea $\widetilde{\mathbf{x}} = \mathbf{x} \circ \varphi$, de modo que la normal correspondiente es $\widetilde{N} = \pm N \circ \varphi$ y

$$\widetilde{L} = -D\widetilde{N} \circ D\widetilde{\mathbf{x}}^{-1} = (\pm DN \circ D\varphi) \circ (D\varphi^{-1} \circ D\mathbf{x}^{-1}) = \pm DN \circ D\mathbf{x}^{-1} = \pm L.$$

La propiedad de que L es autoadjunta se ve más fácilmente en la base $\{\mathbf{x}_u, \mathbf{x}_v\}$, donde tenemos que $L\mathbf{x}_u = -N_u$ y $L\mathbf{x}_v = -N_v$:

$$\langle L\mathbf{x}_{u_i}, \mathbf{x}_{u_j}\rangle = -\langle N_{u_i}, \mathbf{x}_{u_j}\rangle = -\frac{\partial}{\partial u_i}\langle N, \mathbf{x}_{u_j}\rangle + \langle N, \mathbf{x}_{u_i u_j}\rangle.$$

Esta última expresión es simétrica en i y j.

Definición

Sea $S \subset \mathbb{R}^3$ superficie regular orientable, y $\mathbf{x} : U \subseteq \mathbb{R}^2 \to V \cap S$ parametrización. Sea N el campo normal a $\mathbf{x}$ y L el mapa de Weingarten.
*La **tercera forma fundamental** de S en $\mathbf{p}$ se define como*

$$III_{\mathbf{p}}(\mathbf{v}) = I_{\mathbf{p}}(DN(\mathbf{p}) \cdot \mathbf{v}) = \langle DN(\mathbf{p}) \cdot \mathbf{v}, DN(\mathbf{p}) \cdot \mathbf{v} \rangle_{\mathbf{p}} = \langle D^2 N(\mathbf{p}) \cdot \mathbf{v}, \mathbf{v} \rangle_{\mathbf{p}}.$$

- $II_{\mathbf{p}}$ y $III_{\mathbf{p}}$ son formas bilineales en $T_{\mathbf{p}}S$, $\forall \mathbf{p} \in S$.

Proposición

Vale la siguiente relación entre las primeras tres formas fundamentales $I_{\mathbf{p}}$, $II_{\mathbf{p}}$, $III_{\mathbf{p}}$:

$$III_{\mathbf{p}} - \mathrm{tr}(L)\, II_{\mathbf{p}} + \det(L)\, I_{\mathbf{p}} = 0. \quad \square$$

UVG UNIVERSIDAD DEL VALLE DE GUATEMALA